



## **PROJETO DE GRADUAÇÃO 2**

# **ESTUDO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE MATERIAIS DÚCTEIS: EXPERIMENTAÇÃO E MODELAGEM**

**Vinícius Aquino Machado Rodrigues**

**Brasília, 21 de Novembro de 2018**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

## PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

# **ESTUDO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE MATERIAIS DÚCTEIS: EXPERIMENTAÇÃO E MODELAGEM**

**Vinícius Aquino Machado Rodrigues**  
**Orientador: Prof. Lucival Malcher**  
**Coorientador: Prof. Leonel Leonardo Morales**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico.

### **Banca Examinadora**

Prof. Lucival Malcher, UnB/ ENM (Orientador)

---

Prof. Leonel Leonardo Morales, UnB/ ENM  
(Coorientador)

---

Prof. Fábio Comes de Castro, UnB/ ENM

---

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, UnB/ ENM

---

Brasília, 21 de Novembro de 2018

*Aos meus queridos familiares e amigos,  
em especial minha amada mãe.*

*Vinícius Aquino Machado Rodrigues*

## **Agradecimentos**

*Agradeço primeiramente a Deus, por me capacitar, inspirar e me motivar em momentos difíceis, só ele e eu sabemos o como foi longa a caminhada e em quantos momentos eu fraquejei, mas sua força me ajudou a superar todo obstáculo.*

*Agradeço ao meu maior exemplo de persistência e luta, a minha maior inspiração e admiração, minha mãe, dona Tereza Cristina, por sempre acreditar em mim, caminhar ao meu lado me ensinando passo a passo como ser uma pessoa melhor, nunca desistir dos meus sonhos e, sobretudo por fazer o que fosse possível para me ajudar a conquistar os meus sonhos. Com a senhora ao meu lado, mãe, sei que sou capaz de qualquer coisa.*

*Agradeço aos meus professores do ensino médio, que me encorajaram a acreditar no meu potencial.*

*Agradeço também aos meus professores que contribuíram no meu processo de formação, por todo o conhecimento que me foi passado, em especial meu professor orientador Lucival Malcher.*

*Vinícius Aquino Machado Rodrigues*

A formulação de modelos constitutivos que descrevem melhor o comportamento mecânico de materiais dúcteis é uma problemática relevante. A necessidade de uma teoria cada vez mais precisa para a fratura dúctil é um enfoque de grande importância para os setores de alto desempenho da indústria, o que desperta interesse de pesquisa tanto no ramo acadêmico quanto profissional. Neste sentido, o trabalho visa estudar o comportamento elastoplástico dos materiais dúcteis, inicialmente sobre uma formulação simplificada, por meio de um modelo unidimensional, posteriormente um modelo que incorpore os efeitos tridimensionais baseado no critério de escoamento de von Mises. O material de estudo para o presente Projeto de Graduação foi a liga de alumínio 6101 em diferentes estados de tensão. A fim de se obter diferentes níveis de tensão de triaxialidade e terceiro invariante normalizado, foram usinados seis tipos de corpos de prova: cilíndrico liso, cilíndricos com raios de entalhe de 6 mm e 10 mm, usinados para ensaio de tração, corpo de prova retangular para ensaio de cisalhamento puro, e dois modelos retangulares para ensaio de carregamento combinado (tração e cisalhamento). Os dados experimentais são avaliados e utilizados para o procedimento de calibração das simulações numéricas, sendo essas realizadas em um contexto onde assume-se que o modelo baseado no critério de escoamento de von Mises com endurecimento isotrópico não linear descreve o comportamento mecânico do material em problemas axissimétricos e tridimensionais. Para tanto, as curvas de reações obtidas experimentalmente são comparadas quanto aos dados observados e calculados, sendo possível avaliar a influência da tensão de triaxialidade, do terceiro invariante normalizado e do ponto de calibração, tanto no nível da deformação plástica acumulada na fratura, quanto na proximidade do resultado experimental com o numérico. Observa-se nestas análises que existe um distanciamento do resultado experimental com o simulado numericamente, devido a teoria baseada no critério de escoamento de von Mises não capturar os efeitos da tensão de triaxialidade e terceiro invariante. Concluindo-se o trabalho, a deformação plástica equivalente na fratura é analisada como indicador para que se possa observar o início correto da fratura. Observa-se que para níveis de baixas tensões de triaxialidade a deformação plástica na fratura hora decresce e hora cresce com o aumento da tensão de triaxialidade até atingir seu máximo no ponto de calibração do ensaio de tração, ou ponto de início da região de altas tensões de triaxialidade, para essa região, a deformação plástica na fratura decresce com o aumento da tensão de triaxialidade.

**Palavras Chave:** Modelo elastoplástico baseado no critério de escoamento de von Mises, materiais dúcteis, comportamento elastoplástico, liga de alumínio 6101, plasticidade computacional.

---

## ABSTRACT

The formulation of constitutive models that better describe the mechanical behavior of ductile materials is a relevant problem. The need for an increasingly accurate theory for ductile fracture is a focus of great importance for the high performing industry sectors, which arouses research interest in both academic and professional fields. In this sense, the work aims to study the elastoplastic behavior of the ductile materials, initially on a simplified formulation, through a one-dimensional model, later a model that incorporates the three-dimensional effects based on von Mises's flow criterion. The study material for the present Graduation Project was the aluminum alloy 6101 in different states of tension. In order to obtain different levels of triaxial stress and normalized third invariant, six types of test specimens were machined: cylindrical, cylindrical with 6 mm and 10 mm notch radius, machined for tensile test, rectangular specimen for pure shear testing, and two rectangular models for combined loading test (tension and shear). The experimental data are evaluated and used for the calibration procedure of the numerical simulations, which are performed in a context where it is assumed that the model based on the von Mises flow criterion with non-linear isotropic hardening describes the mechanical behavior of the material in problems axisymmetric and three-dimensional. In order to do so, the experimentally obtained reaction curves are compared for the observed and calculated data, and it is possible to evaluate the influence of the triaxial stress, the third invariant normalized and the calibration point, in the level of plastic deformation in the fracture and in the proximity of the experimental result with the numerical one. It is observed in these analyzes that there is a distancing of the experimental result with the numerical simulation, because the theory based on the criterion of von Mises flow does not capture the effects of the triaxiality tension and third invariant. At the end of the work, the equivalent plastic deformation in the fracture is analyzed as an indicator so that the correct beginning of the fracture can be observed. It is observed that for low tension levels of triaxiality the plastic deformation at the fracture, first decreases and then increases with the increase of triaxiality tension until reaching its maximum at the point of calibration of the traction test, or point of beginning of the region of high tensions of triaxiality, for this region, the plastic deformation in the fracture decreases with the increase of the triaxiality tension.

**Keywords:** Elastoplastic model based on the von Mises flow criterion, ductile materials, elastoplastic behavior, aluminum alloy 6101, computational plasticity.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO .....	1
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO .....	6
1.3. METODOLOGIA .....	6
1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	8
<b>2. TEORIA MATEMÁTICA DA PLASTICIDADE .....</b>	<b>10</b>
2.1. ASPECTOS TEÓRICOS PRELIMINARES .....	10
2.2. ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS .....	11
2.3. MODELO UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO .....	13
2.4. MODELOS TRIDIMENSIONAIS .....	17
2.5. MODELO BASEADO NO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES .....	21
<b>3. ESTRATÉGIA NUMÉRICA .....</b>	<b>24</b>
3.1. MODELO MATEMÁTICO UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO .....	24
3.2. MODELO BASEADO NO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES .....	30
<b>4. FABRICAÇÃO DOS CORPOS DE PROVA .....</b>	<b>37</b>
4.1. GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA .....	37
4.2. PARÂMETROS DE USINAGEM .....	41
4.3. PROGRAMAÇÃO EM AMBIENTE CAM .....	41
4.4. USINAGEM DOS CORPOS DE PROVA .....	45
<b>5. DADOS EXPERIMENTAIS E PROCEDIMENTOS DE CALIBRAÇÃO .....</b>	<b>48</b>
5.1. MODELO UNIDIMENSIONAL ISOTRÓPICO .....	48
5.2. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS .....	49
5.2.1 Ensaios de Tração .....	49
Ensaios de Cisalhamento .....	50
5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	51
5.4. PROCEDIMENTOS DE CALIBRAÇÃO E DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MATERIAL .....	54
<b>6. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>58</b>
6.1. DEFINIÇÃO DAS MALHAS .....	58
6.2. CURVAS DE REAÇÃO NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS .....	60
6.3. EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA ACUMULADA .....	64
6.4. EVOLUÇÃO DA TENSÃO DE TRIAXIALIDADE E TERCEIRO INVARIANTE NORMALIZADO .....	69
6.5. AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO PONTO DE CALIBRAÇÃO NO COMPORTAMENTO DO MATERIAL .....	73
<b>7. CONCLUSÕES .....</b>	<b>77</b>
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>80</b>
<b>9. ANEXOS .....</b>	<b>83</b>

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 Exemplos do uso de modelos constitutivos para descrição do comportamento elastoplástico em projetos mecânicos. Fonte: Bao (2004), Bai (2008) e Stoughton (2011). ....	2
Figura 1-2. Contribuição do efeito da tensão hidrostática e do efeito do terceiro invariante do tensor desviador no comportamento de materiais. Fonte: Bai, 2008. ....	5
Figura 2-1. Curva Tensão – Deformação Padrão. Fonte: De Souza Neto (2008). ....	11
Figura 2-2. Experimento de Tensão Uniaxial. Modelo Matemático. Fonte: De Souza Neto (2008) .....	13
Figura 2-3. Curva de Endurecimento do Modelo Unidimensional. Fonte: De Souza Neto (2008) .....	16
Figura 2-4. Representação do ângulo de Lode, $\theta$ , sobre o plano desviador. Fonte: Bai, 2008. ....	19
Figura 2-5. Representação esquemática do vetor tensão, <b>OB</b> no plano das tensões principais e (b) definição do ângulo de Lode no plano- . Fonte: Bai (2008). ....	20
Figura 2-6. Endurecimento isotrópico. Teste uniaxial e representação no plano- $\pi$ . Fonte: De Souza Neto (2008). ....	21
Figura 3-1. Fluxograma da Estratégia Numérica para solução do problema uniaxial. ....	24
Figura 4-1. Geometrias dos corpos de prova fabricados. (a) CP cilíndrico liso (b) CP cilíndrico com raio de entalhe de 10 mm (c) CP cilíndrico com raio de entalhe de 6 mm. CP de cisalhamento puro (e) CP de carregamento combinado com entalhe inclinado em 30° e (f) CP de carregamento combinado com entalhe inclinado em 60° .....	39
Figura 4-2. Relação geométrica do corpo de prova na região crítica. ....	39
Figura 4-3. Representação das forças atuando no CP de cisalhamento e b) Forças no CP de carregamento combinado .....	40
Figura 4-4. Definições da ferramenta de topo reto de 2 mm. ....	41
Figura 4-5. Etapas do projeto do corpo de prova no Mastercam X9. (a) Definição do zero peça e do bloco; (b) caminhos de usinagem para CP combinado 30°; (c) simulação de usinagem do primeiro entalhe; (d) simulação da usinagem com primeiro entalhe realizado; (e) detalhe do caminho de usinagem para o CP combinado 60°. ....	44
Figura 4-6. Trecho do código em linguagem FANUC gerado. ....	45
Figura 4-7. Detalhes da usinagem do CP. ....	46
Figura 4-8. Procedimentos de usinagem do CP de cisalhamento e carregamento combinado. ....	47
Figura 5-1. Resultado numérico do modelo unidimensional. ....	48
Figura 5-2. Ensaio de tração para o CP cilíndrico. ....	50
Figura 5-3. Ensaio de cisalhamento. ....	51
Figura 5-4. Gráfico Força – Deslocamento para o corpo de prova cilíndrico liso. ....	52
Figura 5-5. Curva de Força-Deslocamento para os CP's entalhados com <b>R = 6 mm</b> e <b>R = 10 mm</b> .....	52
Figura 5-6. Gráfico Força – Deslocamento para cisalhamento puro. ....	53
Figura 5-7. Gráfico Força-Deslocamento para os CP's de carregamento combinado com <b><math>\alpha = 30^\circ</math></b> e <b><math>\alpha = 60^\circ</math></b> .....	53
Figura 5-8. Corpos de prova cilíndricos e retangulares, após a fratura. ....	54
Figura 5-9. Condições de calibração para descrição do comportamento mecânico. ....	55
Figura 5-10. Superfícies de escoamento e pontos de calibração. ....	57
Figura 6-1. Malhas de elementos finitos para os CPs cilíndricos. (a) cilíndrico liso, (b) cilíndrico entalhado <b>R = 10 mm</b> e (c) cilíndrico entalhado com <b>R = 6 mm</b> . ....	58
Figura 6-2. Malha de elementos finitos para os CP's de (a) cisalhamento, (b) combinado com <b><math>\alpha = 30^\circ</math></b> e combinado com <b><math>\alpha = 60^\circ</math></b> .....	59
Figura 6-3. Curvas de reação para os CPs cilíndricos. ....	62



Figura 6-4. Curvas de reação para os CPs retangulares. ....	63
Figura 6-5. Curvas de evolução da deformação plástica acumulada para os CP's cilíndricos	65
Figura 6-6. Curvas de evolução da deformação plástica acumulada para os CP's retangulares. .....	66
Figura 6-7. Curva de deformação plástica acumulada na fratura versus tensão de triaxialidade inicial .....	68
Figura 6-8. Evolução da tensão de triaxialidade no ponto crítico. ....	70
Figura 6-9. Contorno da tensão de triaxialidade no primeiro passo e no último passo para os corpos de prova de cisalhamento e carregamento combinado. ....	71
Figura 6-10. Contorno do terceiro invariante normalizado no primeiro passo e no último passo para os corpos de prova de cisalhamento e carregamento combinado. ....	72
Figura 6-11. Força de reação e deformação plástica acumulada para corpo de prova de cisalhamento em diferentes pontos de calibração. ....	74
Figura 6-12. Força de reação e deformação plástica acumulada para CP's de carregamento combinado. ....	76

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1. Resumo do Modelo Matemático Unidimensional. ....	17
Tabela 2-2. Resumo do modelo baseado no critério de escoamento de von Mises .....	23
Tabela 3-1. Modelo numérico unidimensional com endurecimento isotrópico.....	26
Tabela 3-2. Algoritmo de retorno (Newton-Raphson). ....	29
Tabela 3-3. Modelo Matemático de von Mises.....	34
Tabela 4-1. Dados iniciais dos corpos de prova utilizados .....	40
Tabela 5-1. Níveis de deslocamento na fratura experimentalmente observados .....	54
Tabela 5-2. Parâmetros de calibração. ....	56
Tabela 6-1. Descrição dos Elementos de Cada CP. ....	60
Tabela 6-2. Parâmetros elastoplásticos e deformação plástica acumulada. ....	67
Tabela 6-3. Valores da deformação plástica acumulada na fratura.....	69

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Gregos

$\theta$	Ângulo de Lode
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Componentes principais do tensor das tensões
$\varepsilon_n^e$	Deformação elástica
$\varepsilon^e$	Deformação elástica equivalente
$\varepsilon_{n+1}^{eT}$	Deformação elástica total tentativa
$\varepsilon_n^p$	Deformação plástica
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica acumulada
$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$	Deformação plástica acumulada tentativa
$\varepsilon^p$	Deformação plástica equivalente
$\varepsilon_{n+1}^{pT}$	Deformação plástica tentativa
$\varepsilon$	Deformação total
$\varphi$	Função de escoamento
$\varphi^T$	Função de escoamento tentativa
$\Delta\varepsilon$	Incremento de deformação
$\delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$	Incremento de deformação plástica para Newton-Raphson
$\delta\sigma_{n+1}$	Incremento de tensão para Newton-Raphson
$\delta\Delta\gamma$	Incremento do multiplicador plástico para Newton-Raphson
$\sigma_{y0}$	Limite de escoamento
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
$\eta$	Razão de triaxilidade
$\dot{\varepsilon}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica
$\sigma$	Tensão de carregamento
$\sigma_{eq}$	Tensão equivalente de um estado multiaxial de tensões
$\sigma_{n+1}^T$	Tensão tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$	Tensor das deformações elásticas tentativas
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$	Tensor das deformações plásticas equivalente tentativa
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$	Tensor das tensões tentativa
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Tensor taxa de evolução da deformação plástica

## Símbolos Latinos

$S_1, S_2, S_3$	Componente do tensor das tensões desviadoras no plano principal
$\det(\boldsymbol{S})$	Determinante do tensor desviador
$\det(\boldsymbol{\sigma})$	Determinante do tensor tensões
$G$	Módulo de cisalhamento
$E$	Módulo de elasticidade do material
$H^I$	Módulo de endurecimento
$I_1, I_2, I_3$	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões
$J_2, J_3$	Segundo e terceiro invariantes do tensor desviador
$q$	Tensão equivalente de von Mises

$q^T$	Tensão equivalente de von Mises tentativa
$p$	Tensão hidrostática
$\mathbf{D}^e$	Tensor constitutivo de elasticidade
$\mathbf{S}$	Tensor desviador
$\mathbf{I}^4$	Tensor identidade de quarta ordem
$\mathbf{I}$	Tensor identidade de segunda ordem
$tr(\boldsymbol{\sigma})$	Traço do tensor
$R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}}^p$	Vetor de equação residual da deformação
$R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}$	Vetor de equação residual da tensão
$R_{\Delta\gamma}$	Vetor de equação residual do multiplicador plástico
$N$	Vetor de fluxo plástico

# 1. INTRODUÇÃO

*Este capítulo apresenta considerações gerais preliminares relacionadas ao estudo do comportamento elastoplástico do material. São exploradas as diferentes abordagens teóricas já desenvolvidas, a sua importância no contexto da engenharia e exemplos.*

## 1.1.CONTEXTUALIZAÇÃO

O estudo do comportamento do material tem sido objeto de interesse desde os primórdios da engenharia, de modo que a busca por uma teoria que descreva de maneira precisa o comportamento elastoplástico, a fim de descrever o momento da falha, seja interesse de setores da indústria de alto desempenho, bem como para o cenário acadêmico. Ao longo dos últimos anos, a importância e aplicação de modelos elastoplástico, que apresentem uma previsão mais precisa do início da fratura em materiais dúcteis vem crescendo de forma acentuada dentro dos setores competitivos das indústrias aeroespacial, automotiva, bélica, naval, e entre outras (Andrade Pires, 2005; Bai, 2008). Atualmente, o campo de pesquisa voltado para a tentativa de descrição do comportamento elastoplástico do material concentra-se em aprimorar os modelos constitutivos, que representam o modelo teórico que descreva o comportamento do material matematicamente, bem como aplicar a teoria em modelos numéricos, comparando com o observado experimentalmente, para que sejam obtidos dados essenciais para um projeto, como o início da falha, comportamento quando submetido a determinado carregamento, as possibilidades de aplicação, o grau de segurança do projeto e a viabilidade dele.

Neste sentido, teorias já consolidadas e tradicionais da engenharia são amplamente usadas, como o caso da teoria de von Mises, uma das mais abordadas para a mecânica computacional, bem como as teorias de Tresca, Hosford, Bai e Wierzbicki e Gao já que ao aliar os modelos constitutivos com modelos numéricos desenvolve-se projetos mecânicos mais otimizados, baratos e de elevada confiabilidade podendo se tornar uma vantagem competitiva (Andrade Pires,2005; Bai,2008).

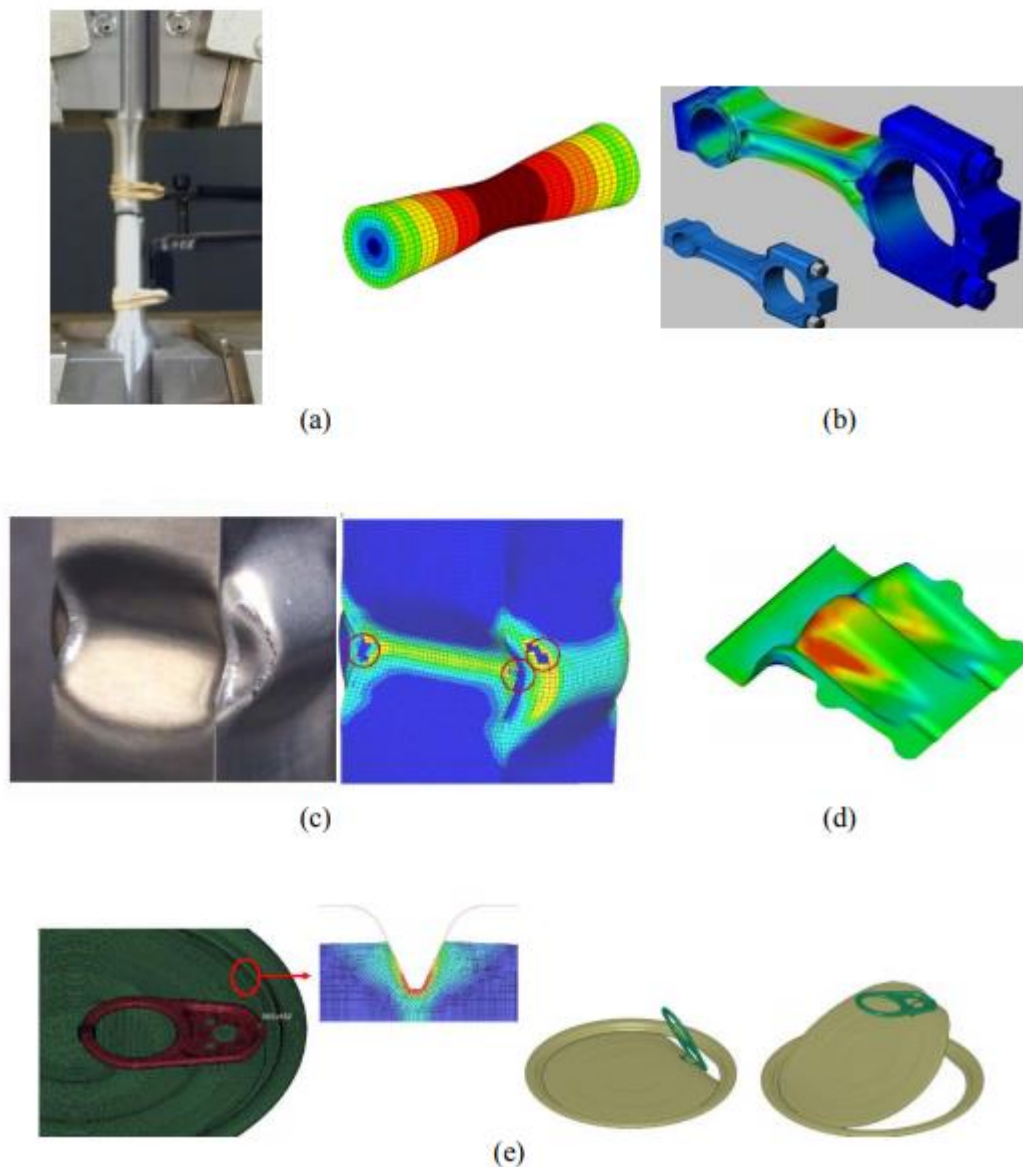


Figura 1-1 Exemplos do uso de modelos constitutivos para descrição do comportamento elastoplástico em projetos mecânicos. Fonte: Bao (2004), Bai (2008) e Stoughton (2011).

Na Figura 1-1 são exemplificadas aplicações computacionais dos modelos constitutivos para caracterização do material em ensaio trativo (Figura 1-1 a), simulação de falha de componentes mecânicos em aplicações comerciais (Fig 1-1b), simulação e caracterização de falha de estruturas (Fig 1-1c) e otimização de processos de fabricação por meio de simulações de descrições fenomenológicas (Fig 1-1d, e).

A relação custo-benefício tem levado a pesquisas para uma tentativa de redução de material, o que conseqüentemente reduz o peso e custo de produção, por exemplo. Neste sentido, torna-se cada vez mais comum a busca de uma redução de peso e quantidade de material empregado em determinados componentes veiculares, sem que isto comprometa as suas características mais importantes, tal qual rigidez, resiliência, ductilidade, desempenho e competitividade (Malcher 2011).

A teoria elastoplástica mais comumente utilizada para descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis é aquele baseado no critério de escoamento de von Mises, apoiando-se na teoria do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, que propõe que o escoamento plástico de um material se inicia quando o segundo invariante do tensor desviador,  $J_2$ , atinge um valor crítico (Hill, 1950; De Souza Neto, 2008). A teoria desenvolvida por Mises é dita insensível à pressão, dado que essa negligencia os efeitos da tensão hidrostática na evolução de fluxo plástico do material ou na evolução da chamada “superfície de escoamento” do material, já que por sua vez, a tensão hidrostática é um parâmetro responsável pelo controle do tamanho da superfície de escoamento do material (Bardet, 1990; Bai, 2008). Entretanto, constatações experimentais evidenciaram que a suposição baseada no segundo invariante não é válida para uma quantidade significativa de materiais (Gao *et al.*, 2011) o que acarretou no desenvolvimento de modelos constitutivos mais precisos. Cabe também ressaltar que a formulação baseada no critério de escoamento de von Mises mostra-se indiferente ao efeito do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras (normalmente denotado por  $J_3$ ), invariante este que é utilizado na definição do ângulo de Lode,  $\theta$ , responsável pelo formato da superfície de escoamento (Bardet, 1990; Bai, 2008).

A cronologia do estudo do comportamento elastoplástico do material pode ser iniciada efetivamente com o desenvolvimento da teoria de Tresca (1868), também conhecido como “critério da máxima tensão cisalhante”, por assumir que o escoamento plástico se inicia quando tensão cisalhante “ $\tau$ ” atinge um valor crítico. Em continuidade ao modelo de Tresca, surgiu em meados de 1913 o modelo de von Mises (De Souza Neto, 2008).

A negligência da teoria de von Mises para a influência da pressão hidrostática, bem como do terceiro invariante levou a atenção de estudiosos da área para a formulação de teoria que preenchem as lacunas observadas naquela de von Mises, como o caso de Hosford(1972) que propõe seu modelo, também insensível a pressão hidrostática, no entanto, dependente do terceiro invariante do tensor desviador. Posteriormente, Richmond & Spitzing (1980) realizaram inúmeras análises experimentais, sendo considerados os pioneiros do estudo dos efeitos da pressão no escoamento da liga de alumínio (Malcher *et al.*, 2009). Uma década depois, Bardet (1990) propôs uma metodologia para descrever a dependência do ângulo de Lode em alguns modelos constitutivos. Brünig (1999) apresentou um critério de escoamento em função do segundo invariante do tensor desviador,  $J_2$ , e do primeiro invariante do tensor das tensões,  $I_1$ , para descrever o efeito da tensão hidrostática sobre as propriedades de fluxo plástico de metais; também Brünig *et al.* (2000) adicionaram o terceiro invariante do tensor desviador,  $J_3$ , como um dos termos da função de escoamento para estudar o comportamento e localização potencial da deformação e também a sensibilidade de metais ao efeito da tensão hidrostática.

Em 2007 Bai *et al.* concentraram estudos na dependência de modelos de plasticidade quanto a tensão hidrostática e do ângulo de Lode como também da aplicação destes na análise de falhas. Posteriormente, Bai (2008) estudou que o efeito do terceiro invariante é mais severo que o efeito do nível de triaxialidade, através da qual a pressão hidrostática é comumente introduzida no critério de escoamento do material; Driemeier *et al.*(2010), concentrou esforços em um programa experimental para se estudar a influência dos invariantes do tensor tensão em fratura dúcteis, que se mostra uma eficiente ferramenta para a investigação dos efeitos da intensidade de carga, da triaxialidade e do ângulo de Lode. Também no ano de 2010 Mirone *et al.* descreve que fenômeno da fratura dúctil é influenciado pela relação com as variáveis de caracterização do estado de tensão-deformação e a predição da falha é melhor descrita pelos parâmetros de deformação plástica, ângulo de Lode e triaxialidade. Gao *et al.*(2011) propuseram um modelo elastoplástico detido de uma influência direta da tensão hidrostática e também do segundo e terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras.

As mais recentes teorias do comportamento elastoplástico são e estão sendo desenvolvidas nos últimos seis anos; Khan e Liu (2012) buscaram estabelecer um critério empírico universal, preciso e eficiente para fratura de metais dúcteis e aplicações de engenharia, realizando ensaios experimentais com a liga Al 2024-T351, com a intenção de propor um modelo que correlacionasse a magnitude do vetor tensão com a pressão hidrostática a fim de aumentar a precisão na previsão do comportamento do material na fratura. Em seus estudos, Khan e Liu constataram que a fratura dúctil é uma manifestação macroscópica da evolução e acúmulo de defeitos microscópicos e assumiram que tal aparição, crescimento e coalescência de micro vazios são os reais responsáveis pela fratura em metais dúcteis. Uma vez estudando a correlação entre triaxialidade e o efeito do ângulo de Lode na formulação de critério para a fratura dúctil, concluíram que a maior dificuldade de se determinar as constantes mecânicas nesses critérios de falha, se encontra na obtenção com precisão dos valores da tensão, razão de triaxialidade e da deformação plástica equivalente no momento da falha. Brünig *et al* (2013) estudaram que o decréscimo da ductilidade do material relaciona-se com um aumento da razão de triaxialidade e apontam tal razão e o ângulo de Lode como os fatores mais importantes que controlam o início e a evolução do dano e da fratura dúctil, além da intensidade da tensão.

Malcher *et al* (2013) incluíram o efeito do ângulo de Lode dentro do modelo de dano contínuo de Lemaitre. Tal associação promoveu uma previsão numérica mais próxima das observadas experimentalmente, tanto para o deslocamento quanto para o local potencial para início da fratura.

Segundo alguns autores (Bardet, 1990; Bai, 2008), a tensão hidrostática é um parâmetro responsável pelo tamanho da superfície de escoamento e o ângulo de Lode, que é em função do terceiro invariante do tensor desviador,  $J_3$ , é o parâmetro responsável pelo formato da superfície de escoamento. O efeito destes parâmetros no comportamento mecânico de materiais dúcteis pode ser mostrado pelas três configurações de curvas obtidas da simulação numérica do modelo proposto por Bai & Wierzbicki (2007) na Fig.(1.2). Uma destas configurações se iguala ao modelo de von Mises



sem o efeito da tensão hidrostática e do terceiro invariante do tensor desviador, a outra faz o uso do efeito da tensão hidrostática e a última configuração faz uso do efeito da tensão hidrostática e do terceiro invariante do tensor desviador.

A fim de comparar tanto quantitativamente os efeitos do ângulo de Lode, que por sua vez é função do terceiro invariante do tensor desviador,  $J_3$  e a tensão hidrostática, Bai & Wierzbicki (2007) realizaram simulações numéricas baseados no seu modelo em comparação com o modelo experimental e evidenciaram o efeito destes parâmetros no comportamento mecânico de materiais, como apresentado na Figura 1-2

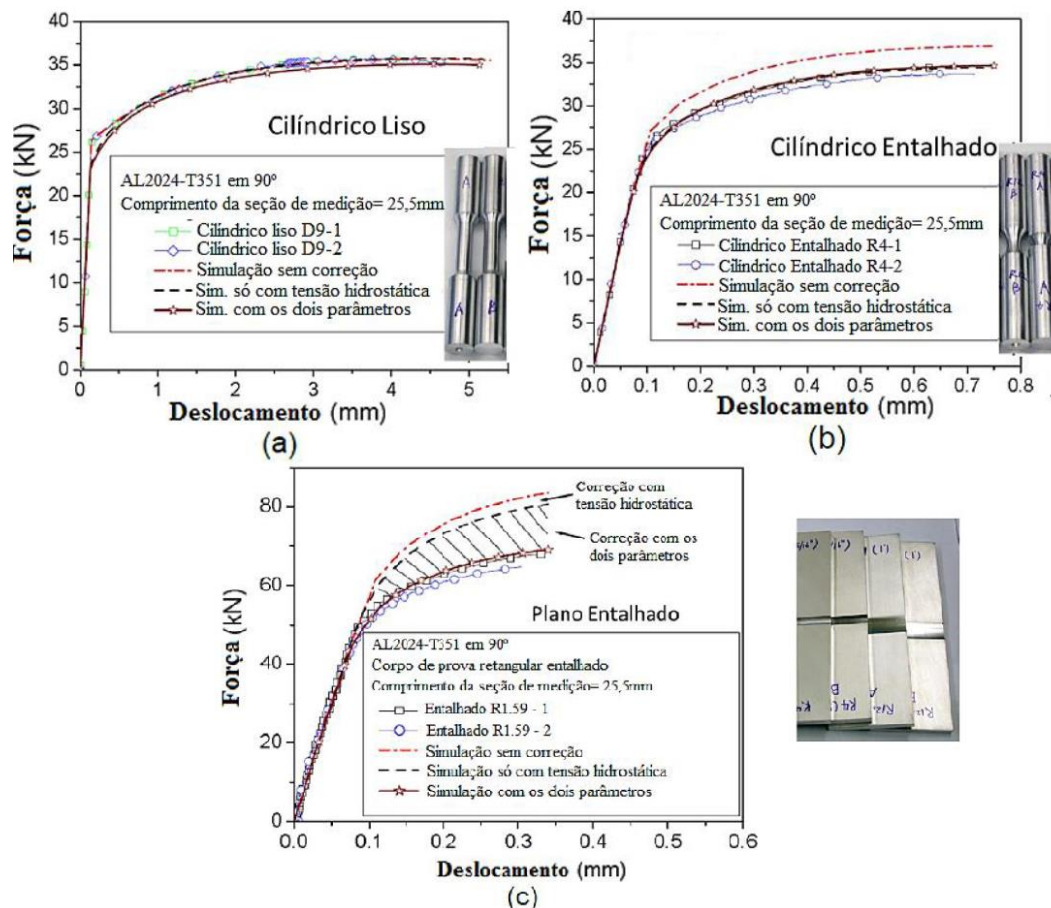


Figura 1-2. Contribuição do efeito da tensão hidrostática e do efeito do terceiro invariante do tensor desviador no comportamento de materiais. Fonte: Bai, 2008.

A tensão hidrostática é a responsável pelo controle da superfície de escoamento e o ângulo de Lode, influencia no formato desta superfície (Bardet, 1990; Bai, 2008). A Figura 1-2 apresenta a simulação numérica do modelo de Bai & Wierzbicki sem correções, o qual se iguala ao modelo de von Mises, com correção do efeito da pressão hidrostática e com correção dos efeitos da pressão e do ângulo de Lode. Os resultados desta simulação de três tipos de corpos de provas, que variam a dependência quanto à pressão hidrostática e ao ângulo de Lode, mostram que o aumento da influência

ângulo de Lode está intrinsicamente ligado a uma maior componente de cisalhamento, e que a simulação ganha mais precisão com a inclusão destes efeitos.

A cronologia dos modelos constitutivos acompanha a evolução da capacidade de processamento dos computadores, fornecendo uma eficiência maior na realização de cálculos, o que possibilita o desenvolvimento de ferramenta matemáticas aplicadas à computação como o caso do Método dos Elementos Finitos (MEF), amplamente usado na mecânica computacional atualmente para os ensaios numéricos dos modelos constitutivos.

## **1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO**

O objetivo deste Projeto de Graduação é descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis até a fratura dúctil, em especial a liga de alumínio 6101, considerando os regimes elástico e plástico, partindo de um modelo simples, unidimensional, até um modelo tridimensional baseado no critério de escoamento de von Mises, incorporando cada um deles em modelos numéricos para que sejam realizadas simulações e estas comparadas com os resultados obtidos experimentalmente, comparando-se os efeitos da tensão de triaxialidade e do terceiro invariante para cada ensaio realizado. Para isto, serão considerados como objetivos secundários:

- i) Ensaio mecânico de corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração, e, corpo de prova de cisalhamento e corpo de prova submetido a carregamento combinado;
- ii) Implementação numérica do modelo elastoplástico, baseado no critério de escoamento de von Mises e endurecimento isotrópico;
- iii) Simulação numérica e comparação com resultados experimentais.

## **1.3. METODOLOGIA**

Inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica a cerca do comportamento elastoplástico do material, apresentando-se os aspectos teóricos preliminares, os aspectos fenomenológicos, para que assim seja possível a descrição da teoria matemática de um modelo elastoplástico, inicialmente unidimensional, e, em continuidade, um modelo tridimensional baseado no critério de escoamento de von Mises.

Uma vez realizada a revisão bibliográfica, dar-se-á início a formulação de uma estratégia numérica que incorpore os conceitos da teoria matemática da plasticidade em uma ferramenta de academia de elementos finitos, no caso em questão, o software Hyplas. Para a modelagem em elementos finitos levou-se em consideração grandes deformações e a integração implícita do modelo constitutivo, que inclui o critério de escoamento de von Mises, endurecimento isotrópico não linear e plasticidade

associativa. Toda a teoria matemática da descrição do comportamento elastoplástico do material foi escrita segundo a teoria de pequenas deformações, contudo, utilizou-se o algoritmo de transformação para grandes deformações, proposto por De Souza Neto (2008) para a devida adaptação do modelo em elementos finitos de grandes deformações.

Foram construídos seis modelos diferentes de corpos de prova, com peculiaridades quanto ao: estado de tensão, nível de tensão de triaxialidade e terceiro invariante normalizado. O trabalho conta com a metodologia realizada durante o projeto do CP, sendo utilizado como ferramenta de descrição dos processos de usinagem o software Mastercam X9, que gera o código interpretado pela máquina de usinagem, sendo ela o torno CNC ou mesmo a máquina fresadora CNC. Portanto, a fim de se atingir os estados de tensão específicos, foram usinados corpos de prova:

- Cilíndrico liso para carregamento trativo;
- Cilíndrico com raio de entalhe de 6 mm, para carregamento trativo;
- Cilíndrico com raio de entalhe de 10 mm, para carregamento trativo;
- Retangular para carregamento de cisalhamento puro;
- Dois modelos retangulares para carregamento combinado.

Em continuidade do trabalho, foram realizados ensaios experimentais para cada corpo de prova, como anteriormente mencionado. Nos ensaios foram obtidas as curvas de reação, bem como os parâmetros de calibração que foram usados nas simulações. Os parâmetros do material foram definidos segundo os dados obtidos no ensaio de tração, sendo assim simulados os corpos de prova em elementos finitos de modo a se verificar os efeitos da calibração em tração para as simulações em cisalhamento, onde os efeitos do terceiro invariante normalizado e da tensão de triaxialidade são observados. Posteriormente, para os corpos de prova de cisalhamento e carregamento combinado, foram simulados segundo os dados obtidos no ensaio de cisalhamento, de modo que a simulação, para o caso do corpo de prova de cisalhamento puro, represente satisfatoriamente o resultado obtido experimentalmente.

Realizadas as simulações numéricas, foram comparadas as curvas de reação do modelo em elementos finitos com o observado experimentalmente para cada caso, a fim de se avaliar a influência dos parâmetros elastoplásticos em cada condição. Dessa forma, foi analisada também a evolução da deformação plástica acumulada, evolução da tensão de triaxialidade e terceiro invariante e a avaliação do ponto de calibração no comportamento do material, descrito por meio de elementos finitos.

## 1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este Projeto de Graduação encontra-se dividido em sete capítulos que se subdividem a fim de estruturar de forma mais organizada e objetiva cada tema, respeitando o assunto principal de cada capítulo. O primeiro capítulo incorpora uma contextualização do trabalho, evidenciando os pontos principais da motivação do estudo, o que se tem desenvolvido até o presente momento, o que procura-se desenvolver e quais os mecanismos estão sendo utilizados para este desenvolvimento. Tal capítulo conta ainda com a importância do estudo dos efeitos da razão de triaxialidade e do terceiro invariante no comportamento elastoplástico do material, a fim de corroborar para um encorajamento da concentração de esforços para o estudo desses parâmetros.

No segundo capítulo são apresentados os arcabouços teóricos que fomentam a teoria da plasticidade, sendo apresentada de forma didática e metodologia, partindo-se de um modelo unidimensional que incorpora toda a lógica por trás da teoria, que se expande apresentando os aspectos fenomenológicos até que seja apresentado o modelo matemático tridimensional “geral”, e depois as devidas peculiaridades dos demais modelos tridimensionais.

No capítulo terceiro apresenta-se a formulação da estratégia numérica para que seja implementado os modelos matemáticos descritos no capítulo anterior em ferramentas computacionais. Faz-se o uso da abordagem matemática da decomposição do operador, o trabalho tensorial exigido pela formulação matemática e as estratégias de integração numéricas adotadas para sancionar os problemas dados pelos sistemas lineares.

O quarto capítulo apresenta o projeto de fabricação de cada corpo de prova, desde a explicação da peculiaridade de cada geometria e o que pretende-se alcançar com ela, os principais parâmetros de projeto como ferramentas de usinagem, maquinário e etc, a programação em um ambiente CAM que serve como ferramenta de interligação do projeto do corpo de prova com uma linguagem interpretada pela máquina de usinagem e, por fim, o processo de usinagem propriamente dito.

O quinto capítulo apresenta os resultados obtidos mediante a realização dos ensaios experimentais, partindo de um modelo unidimensional apenas incorporado para fins didáticos, em segundo passo são apresentados os procedimentos experimentais para os ensaios de tração, cisalhamento puro e carregamento combinado e por último é apresentado os procedimentos de calibração dos parâmetros elastoplásticos que são obtidos nos ensaios e serão usados nas simulações numéricas.

O sexto capítulo procura apresentar e analisar os resultados experimentais em comparação com os resultados numéricos obtidos. Neste capítulo são apresentadas as definições das malhas curvas de Tensão – Deformação tão importante para os projetos engenharia, as curvas de evolução da deformação plástica acumulada, as evoluções da tensão de triaxialidade e do terceiro invariante e uma

avaliação da influência do ponto de calibração na determinação da curva de reação e na evolução da deformação plástica acumulada.

No sétimo e ultimo capítulo são apresentadas as conclusões relevantes para o dado Projeto de Graduação, se estas encontram-se dentro do esperado previamente, caso não se encontrem as suas respectivas justificativas e o resultado dos estudos realizados numericamente (de forma computacional) e matematicamente.

## 2. TEORIA MATEMÁTICA DA PLASTICIDADE

*Neste capítulo serão apresentados os modelos matemáticos do comportamento elastoplástico do material com sua incorporação fenomenológica.*

### 2.1 ASPECTOS TEÓRICOS PRELIMINARES

É sabido que o estudo das propriedades mecânicas de um material é prioridade de diversas áreas da engenharia, seja para otimização de processos produtivos de alto desempenho ou para desenvolvimento teórico acerca desse, portanto, a assimilação do comportamento do material de maneira detalhada retoma a uma das principais vertentes da engenharia, a seguridade de um projeto. As raízes de uma ideia elementar da teoria da plasticidade podem ser datadas de três séculos e meio (Jirásek e Bažant, 2002).

Nesse sentido, são atribuídos conceitos de modo a se detalhar o objeto de estudo, sendo definido, por exemplo, a *resistência* como uma propriedade ou característica de um elemento mecânico (Shigley, 2011). A resistência mecânica de um dado material pode ser considerada como uma das principais propriedades desse, pois é a partir dela que se é possível criar um histórico de carregamento do material até a sua falha, ou em linguagem de engenharia, até o seu escoamento, passando do seu limite elástico para um comportamento plástico.

Quando o carregamento ao qual o material encontra-se submetido é maior que a sua resistência mecânica ao escoamento dele, ocorre à chamada *falha* que pode significar que uma peça tenha se separado em dois ou mais pedaços, tenha se tornado permanentemente distorcida, arruinando assim sua geometria, tenha tido sua confiabilidade depreciada ou sua função comprometida, qualquer que seja a razão (Shigley, 2011). Em regime de operação antes do escoamento da peça, ou seja, antes da sua falha, a descrição da tensão em função da deformação apresentada pela peça segue um comportamento linear, descrito pela Lei de Hooke.

A teoria matemática da plasticidade é o fundamento básico para a descrição do comportamento elastoplástico do material, nada mais é do que uma busca descritiva do comportamento de importantes classes de materiais, especialmente interligados com um contexto de engenharia, como metais, concreto, pedras, argila dentre outros. Basicamente, a teoria preocupa-se com sólidos aos quais, depois de submetidos a um programa de carregamento, podem sustentar uma deformação permanente (ou plástica), após serem completamente descarregados (De Souza Neto, 2008). Cabe ressaltar que essa está restringida a descrição de um conjunto de materiais que, segundo De Souza Neto (2008) a deformação permanente não depende da taxa de aplicação de cargas, de modo a ser referida por muitas vezes como “teoria da plasticidade independente da taxa de carregamento”. Tal observação apresenta

um prelúdio importante quanto à classe dos materiais abordados pela teoria, nomeados de *materiais plásticos*, retomando a ideia inicial de ductilidade, ou sua capacidade de deformação sendo essa permanente ou não. A origem destes estudos é retomada da metade do século dezenove e sendo considerada até hoje como modelo constitutivo fenomenológico de maior sucesso.

## 2.2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS<sup>1</sup>

A resposta mecânica do comportamento de um material quando submetido a um programa de carregamento possui resultados qualitativamente distintos para cada tipo de material observado, no entanto, materiais tão contrastantes quanto metal e solo compartilham algumas características importantes do seu comportamento fenomenológico, tornando-os passíveis de uma modelagem por meio da teoria da plasticidade (De Souza Neto, 2008).

Um dos mais importantes ensaios da engenharia é o de *tensão uniaxial de metais dúcteis*, produzindo uma curva característica de Tensão-Deformação como mostrado na Figura 2-1.

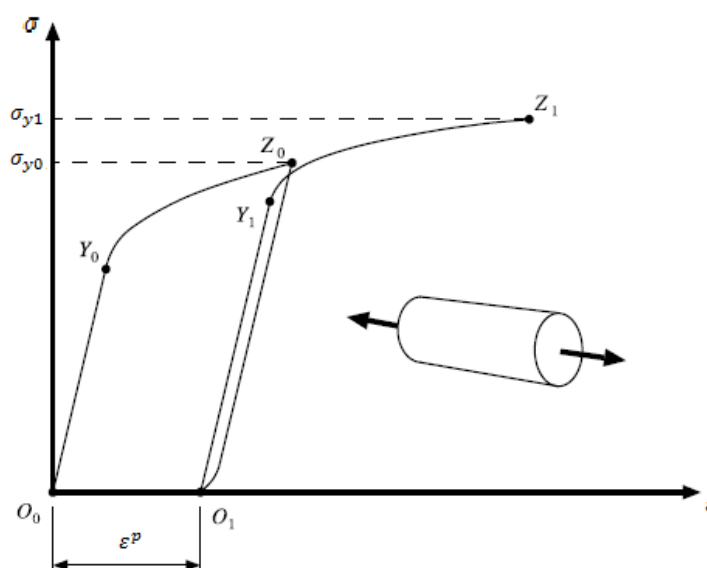


Figura 2-1. Curva Tensão – Deformação Padrão. Fonte: De Souza Neto (2008).

Como se pode observar, o caminho descrito por  $O_0Y_0$  segue um padrão praticamente linear, onde que se o histórico de carregamento for interrompido, o material retoma a sua posição inicial, descrito, portanto, como carregamento elástico. Caso o carregamento seja progredido de  $Y_0$  em diante, observa-se uma mudança drástica da inclinação da curva, de modo que, se o carregamento for interrompido no ponto  $Z_0$ , por exemplo, a barra metálica retoma a sua posição descarregada no ponto  $O_1$ , carregando consigo uma deformação residual permanente, sendo avaliado esse estado como estado de deformação

<sup>1</sup> Texto adaptado de : Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications EA De Souza Neto, D Perić and DRJ Owen © 2008 John Wiley & Sons, Ltd.

permanente, ou plástica. De modo similar ao observado na trajetória  $O_0Y_0$ , o novo percurso  $O_1Y_1$  segue um padrão praticamente linear, e se interrompido o histórico de carregamento em pontos da curva antecessores ao ponto  $Y_1$ , a barra retoma ao seu estado  $O_1$ . Observa-se portanto um padrão cíclico de carregamento e deformação para os casos elásticos e plásticos, onde se ultrapassado no gráfico de Tensão-Deformação um comportamento linear é obtido um novo estágio inicial para o material, carregando consigo uma deformação plástica residual observada na mudança da sua geometria, e, tomando-se novamente um novo histórico de carregamento, o comportamento inicial desse também será descrito de forma praticamente linear, até a sua ruptura. A observação do gráfico apresentado na Figura 2-1 remete a importantes observações a cerca do comportamento fenomenológico do material, como descritas a seguir:

- A existência de um *domínio elástico*, *i.e.* uma série de tensões com o qual o material pode ser considerado puramente elástico, sem evolução de deformações permanente. O domínio elástico é delimitado pela chamada “tensão de escoamento”. Na Figura 2-1 os segmentos  $O_0Y_0, O_1Y_1$  definem o domínio elástico de dois estados diferentes, onde as tensões de escoamento associadas são  $Y_0$  e  $Y_1$  respectivamente.
- Se o material for carregado acima da tensão de escoamento, observa-se um *escoamento plástico*, *i.e.* evolução de deformações plásticas são avaliadas.
- Acompanhando a evolução de deformações plásticas observa-se a evolução da tensão de escoamento. Este fenômeno é chamado de *endurecimento*.

Cabe ressaltar que mecanismos microscópicos que dão origem a estas características fenomenológicas em comum podem ser completamente diferente para diferentes materiais. (De Souza Neto, 2008). Para o modelo uniaxial algumas observações devem ser avaliadas, como sua validade somente é observada em casos onde temperaturas para as quais a recuperação, fluência e fenômenos térmicos geralmente podem ser negligenciados (Hill, 1990), os efeitos tridimensionais também serão desconsiderados em primeiro momento para o caso uniaxial.

Apesar da simplicidade do modelo uniaxial ele aborda elementos essenciais para um embasamento teórico do modelo tridimensional que será apresentado em capítulos subsequentes. Para a simplificação do processo, são realizadas algumas aproximações, como inicialmente a adoção da coincidência dos pontos  $Z_0$  e  $Y_1$  (o início do descarregamento e a tensão de escoamento inicial para um estágio de recarga), eliminando-se assim as diferenças entre as curvas de descarga e recarga apresentadas na Figura 2-1. A aplicação gráfica desse fenômeno encontra-se disponível na Figura 2-2:



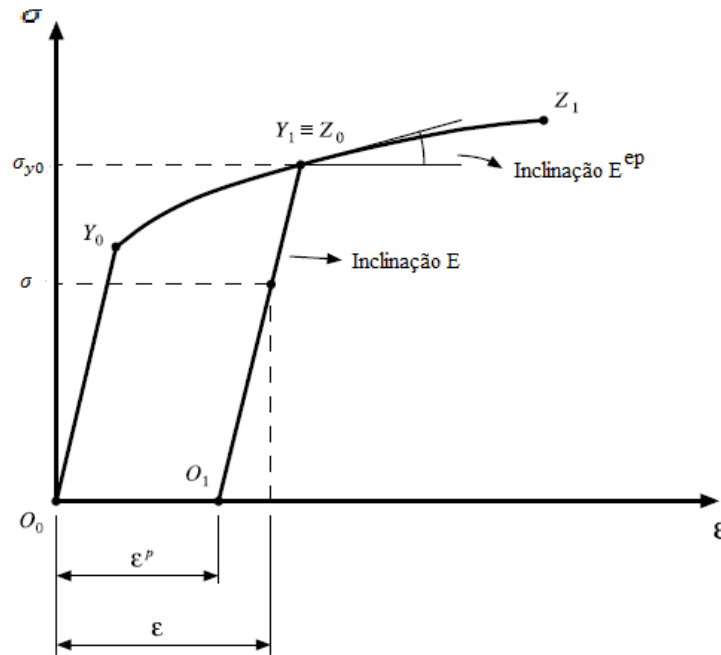


Figura 2-2. Experimento de Tensão Uniaxial. Modelo Matemático. Fonte: De Souza Neto (2008)

Quando carregado monotonicamente de um estado inicial sem tensão, para um estado de tensão  $\sigma_{y0}$ , o comportamento do material entre os estados  $O_1$  e  $Y_1$  é considerado como linear elástico, com a constante de deformação plástica dada por  $\varepsilon^p$  e o limite de escoamento  $\sigma_{y0}$ , de modo que a tensão de carregamento total para tal estado é descrita pela lei de Hooke como segue na equação:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad 2.1$$

onde  $E$  corresponde ao módulo de elasticidade (ou módulo de Young) do material,  $\varepsilon$  é a deformação total experimentada pelo material.

O objetivo da teoria matemática da plasticidade é promover um modelo constitutivo capaz de descrever (quantitativa e qualitativamente) com precisão suficiente o comportamento fenomenológico do material (De Souza Neto, 2008).

## 2.3 MODELO UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

O modelo unidimensional é apresentado previamente para uma descrição rudimentar de caráter didático, com intuito de se aprofundar no conhecimento da metodologia a fim de compreender a sua lógica construtiva da mecânica computacional que descreve o comportamento elastoplástico do material. Apesar da sua matemática elementar, a lógica construtiva do modelo unidimensional é igual à lógica dos modelos tridimensionais, fazendo-se as devidas alterações para atender-se a peculiaridade de tais modelos. A eficiência desse modelo é considerável, sendo um bom comparativo inicial para os estudos, pela sua simplicidade de aplicação e facilidade teórica.

A construção do modelo matemático se inicia pela escolha da chamada *função de escoamento*, como apresentada:

$$\varphi(\sigma, \sigma_{y0}) = |\sigma| - \sigma_{y0} \quad 2.2$$

onde  $|\sigma|$  é o módulo da tensão de carregamento total. A tensão de escoamento,  $\sigma_{y0}$ , é responsável por delimitar o domínio elástico, já a *função de escoamento*,  $\varphi(\sigma, \sigma_{y0})$ , delimita a chamada “superfície de escoamento”, indicando em que regime, seja ele elástico ou plástico, o material encontra-se.

A partir da função de escoamento, é determinada então a *direção do fluxo plástico* do material, representado matematicamente pela derivada da função de escoamento em função da tensão, como apresentado:

$$N \equiv \frac{d\varphi}{d\sigma} \quad 2.3$$

onde  $N$  representa o vetor de fluxo plástico que indica a direção preferencial do fluxo de escoamento plástico observado. Para o modelo unidimensional isotrópico, o vetor de fluxo representa um “sinal”, positivo ou negativo, uma vez que a derivada da função de escoamento em função da tensão é dada como:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad 2.4$$

o que substancialmente representa a “positividade” do fluxo de escoamento, o que faz todo sentido matemático, já que o vetor  $N$  representa uma derivada direcional, para um modelo unidimensional esta derivada é uma constante, no caso, uma constante unitária, positiva ou negativa.

Determinado a direção do fluxo plástico, o terceiro passo consiste na determinação da taxa de evolução da deformação plástica, matematicamente descrito:

$$\dot{\varepsilon}^p \equiv \dot{\gamma}N = \dot{\gamma} \frac{\sigma}{|\sigma|} = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) \quad 2.5$$

A equação 2. 5 é também chamada *lei de fluxo plástico*, onde  $\dot{\gamma}$  é o chamado *multiplicador plástico*, que possui a característica de ser não negativo,  $\dot{\varepsilon}^p$  é a taxa de deformação plástica, obtida a partir da chamada *decomposição aditiva da deformação* e o termo  $\text{sign}(\sigma)$  é uma função que pode ser descrita como:

$$\text{sign}(\sigma) \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \geq 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad 2.6$$

A *decomposição aditiva da deformação* consiste numa contribuição das componentes de deformação descrita como:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad 2.7$$

onde  $\varepsilon^e$  é a chamada deformação elástica e  $\varepsilon^p$  a deformação plástica.

Posteriormente, faz-se a determinação da chamada *deformação plástica acumulada*, avaliada na chamada *lei do endurecimento* como:

$$\dot{\varepsilon}^p \equiv \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt = \sqrt{\dot{\varepsilon}^p \cdot \dot{\varepsilon}^p} \quad 2.8$$

onde  $\dot{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica acumulada, definida como a integral no tempo  $t$  do módulo taxa de deformação plástica,  $\dot{\varepsilon}^p$ . O fenómeno do endurecimento consiste numa evolução do limite de escoamento em decorrência da evolução da deformação plástica (De Souza Neto, 2008). O módulo na integral apresentada acima na equação 2. 8 serve para garantir a contribuição aditiva na deformação plástica acumulada tanto de um regime trativo quanto compressivo. Para o dado modelo unidimensional a equação 2. 8 pode ser resumida em:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \quad 2.9$$

Por fim, é observada a chamada *regra de complementaridade*, que representa um conjunto de inequações restritivas para o modelo unidimensional com endurecimento isotrópico, apresentados como:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \varphi \leq 0; \quad \dot{\gamma}\varphi = 0 \quad 2.10$$

O domínio elástico, portanto, pode ser apresentado como uma associação da regra de complementaridade com a função de escoamento:

$$\varepsilon = \{ \sigma | \varphi(\sigma, \sigma_{y0}) < 0 \} \quad 2.11$$

A função de escoamento descreve o regime ao qual o material se encontra, podendo ser o regime elástico ou o regime plástico. Se a tensão for menor do que o limite de escoamento, isso indica uma função de escoamento negativa, indicando que o regime encontra-se dentro do domínio elástico,

apenas sendo observadas deformações elásticas. Caso a função de escoamento seja igual a zero, o regime de operação, isto é, o comportamento do material naquele instante encontra-se no domínio elástico, sendo possível a presença ou não de deformações elásticas, que apenas serão avaliadas caso a taxa de evolução da deformação plástica seja diferente de zero. Dessa maneira, podemos expressar o critério de escoamento pelas seguintes equações:

$$\text{Se } \varphi(\sigma, \sigma_{y0}) < 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad 2.12$$

$$\text{Se } \varphi(\sigma, \sigma_{y0}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = 0 & \text{Apenas presença de deformações elásticas} \\ \dot{\varepsilon}^p \neq 0 & \text{Indica presença de deformações plásticas} \end{cases} \quad 2.13$$

Outra importante observação é quanto a *lei de endurecimento*, sua representação gráfica é observada na Figura 2-3 que apresenta uma propriedade mecânica de extrema importância para teoria elastoplástica, o chamado *módulo de endurecimento*,  $H^l$ .

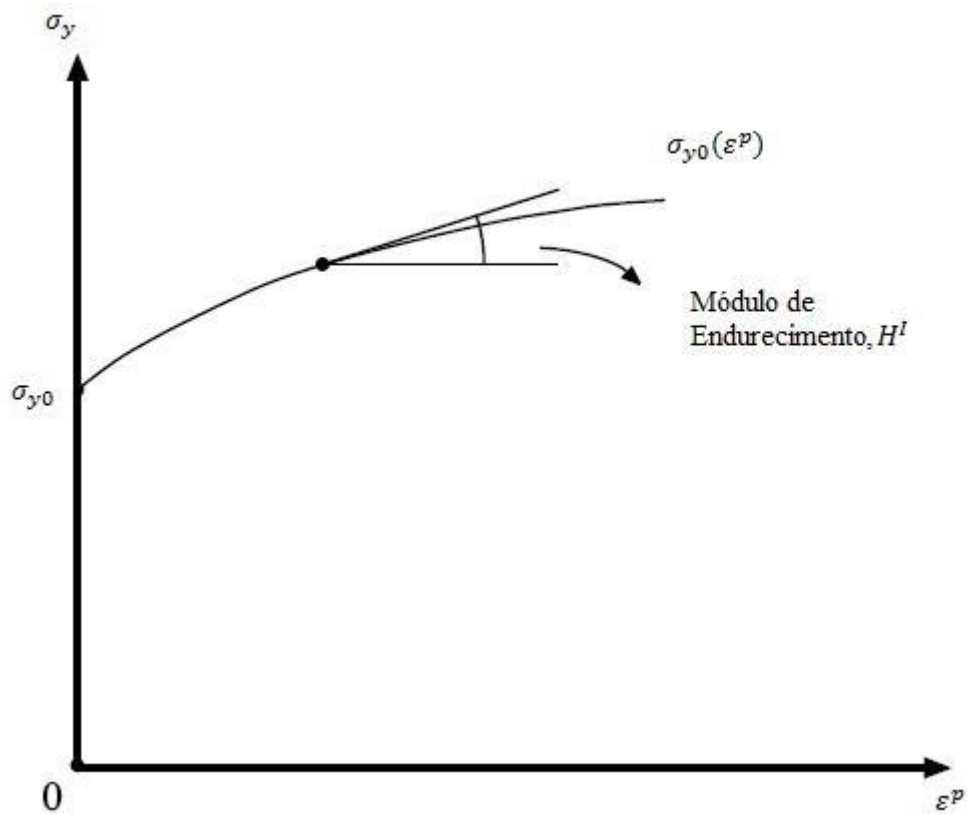


Figura 2-3. Curva de Endurecimento do Modelo Unidimensional. Fonte: De Souza Neto (2008)

A Tabela 2-1 apresenta um resumo esquemático do modelo matemático unidimensional apresentado:

Tabela 2-1. Resumo do Modelo Matemático Unidimensional.

	<b>Equação</b>
<b>Decomposição aditiva das deformações</b>	$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$
<b>Lei Elástica Uniaxial</b>	$\sigma = E\varepsilon^e$
<b>Função de Escoamento</b>	$\varphi(\sigma, \sigma_{y0}) =  \sigma  - \sigma_{y0}$
<b>Lei do Escoamento Plástico</b>	$\varepsilon^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$
<b>Lei do Endurecimento</b>	$\sigma_y = \sigma_{y(\bar{\varepsilon}^p)} = \sigma_{y0} + H^l \bar{\varepsilon}^p$ $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$
<b>Crítério de Complementaridade</b>	$\varphi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \varphi \dot{\gamma} = 0$

## 2.4 MODELOS TRIDIMENSIONAIS

### 2.4.1 Definições Preliminares

Diferente do modelo elastoplástico unidimensional, as operações matemáticas agora são inseridas em um contexto de álgebra tensorial, em conformidade com a complexidade operacional da teoria para um modelo tridimensional. O tensor das tensões pode ser decomposto em uma componente desviadora a qual se situa no *plano  $\pi$*  ou *plano desviador*, plano o qual possui a peculiaridade da tensão hidrostática ser igual à zero, e uma componente hidrostática, situada no plano perpendicular ao plano desviador. Com isso, a representação matemática do tensor de tensões é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + p\boldsymbol{I} \quad 2.14$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões, a componente  $\boldsymbol{S}$  é o ou tensor das tensões desviadoras, situado no plano  $\pi$  e  $p\boldsymbol{I}$  é chamado de tensor hidrostático, sendo que  $\boldsymbol{I}$  representa o tensor identidade de segunda ordem e  $p$  representa um escalar chamado tensão hidrostática, definida por:

$$p \equiv \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad 2.15$$

no qual a operação  $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  representa o traço do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , e  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são suas componentes principais. O tensor desviador possui traço nulo e é representado pela equação

$$\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I} = \left[ \mathbf{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] : \boldsymbol{\sigma} \quad 2.16$$

onde  $\mathbf{I}^4$  representa o tensor identidade de quarta ordem, a operação “:” representa a dupla contração entre tensores e “ $\otimes$ ” representa o produto tensorial.

Da equação 2. 14, a componente tensorial hidrostática representa a capacidade do estado de tensões em produzir variações volumétricas elásticas. E a componente tensorial desviadora é responsável pelas mudanças de forma (Gurtin, 1981). Segundo De Souza Neto (2008), o modelo constitutivo da lei de tensão retoma de uma importante derivação da energia potencial, sendo esta uma função da deformação total, da deformação plástica (tomada como variável interna) e as variáveis internas associadas ao fenômeno de endurecimento.

Valores que não se alteram de acordo com o sistema de coordenadas adotado são definidos como *invariante* (Holzapfel, 2000), que servem, portanto para descrever o tensor das tensões em qualquer sistema de coordenadas. Uma prática tradicional dos estudos elastoplásticos consiste em denotar os invariantes do tensor de tensões pela letra “ $I$ ” e os invariantes do tensor das tensões desviadoras pela letra “ $J$ ”, como apresentados:

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad 2.17$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [tr(\boldsymbol{\sigma})^2 - tr(\boldsymbol{\sigma}^2)] \quad 2.18$$

$$I_3 = det(\boldsymbol{\sigma}) \quad 2.19$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \quad 2.20$$

$$J_3 = det(\mathbf{S}) \quad 2.21$$

onde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  representam, respectivamente, o primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão e  $J_2$ ,  $J_3$  o segundo e terceiro invariantes do tensor desviador. Por definição, o primeiro invariante do tensor desviador apresenta traço nulo,  $J_1=0$ , já que o tensor desviador possui um traço nulo, as operações  $det(\mathbf{S})$ ,  $det(\boldsymbol{\sigma})$  são os determinantes do tensor desviador e do tensor das tensões, respectivamente.

Apresentados os invariantes é possível a definição dos parâmetros de alta relevância para os estudiosos da área do comportamento elastoplástico, são eles a *razão de triaxialidade (ou tensão de triaxialidade)* e o *ângulo de Lode*, definidos respectivamente como:

$$\eta = \frac{p}{\sigma_{eq}} \quad 2.22$$

$$\theta = \arctan \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 2 \left( \frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_3} \right) - 1 \right] \right\} \quad 2.23$$

onde  $\sigma_{eq}$  um escalar que representa a tensão equivalente, dado um estado multiaxial de tensões, distinto para cada modelo constitutivo e  $S_1, S_2, S_3$  são as componentes do tensor das tensões desviadoras no plano principal.

O ângulo de Lode é responsável por dar a forma da superfície de escoamento do material (Bai, Y., Wierzbicki, T. 2007), sendo ele definido como o menor ângulo formado entre a projeção do tensor das tensões no plano  $\pi$  e um dos eixos das tensões principais conforme ilustrado na Figura 2-4

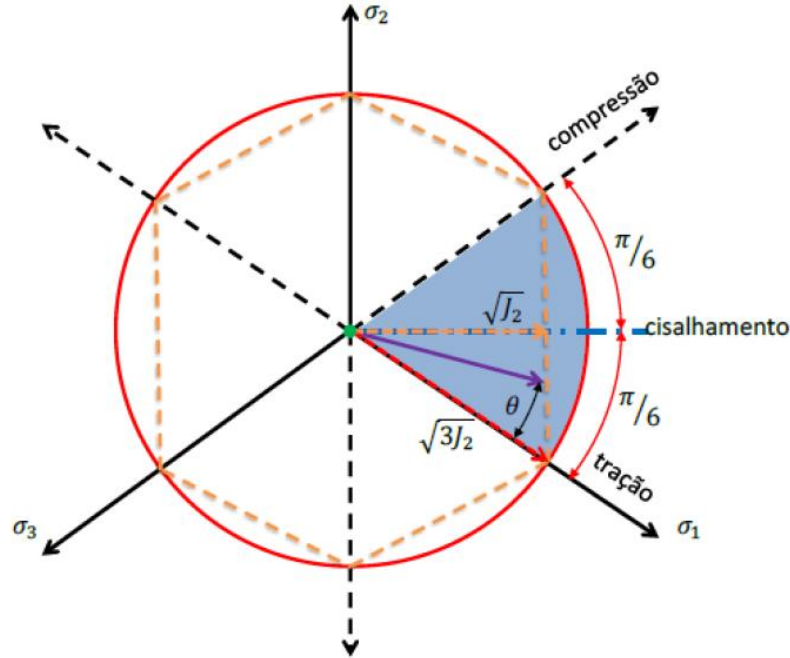


Figura 2-4. Representação do ângulo de Lode,  $\theta$ , sobre plano desviador. Fonte: Bai, 2008.

O ângulo de Lode é o ângulo, no plano desviador, entre o tensor desviador e o eixo da tensão principal, dentro de um intervalo definido:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad 2.24$$

A definição do ângulo deste ângulo pode ser compreendida através da análise da representação do vetor tensão,  $\overline{OB}$ , no espaço das tensões principais. Conforme ilustrado na Figura 2-5





escoamento causada pelo endurecimento do material.  $H^I$  representa o módulo de endurecimento e  $E$  o módulo de elasticidade do material.

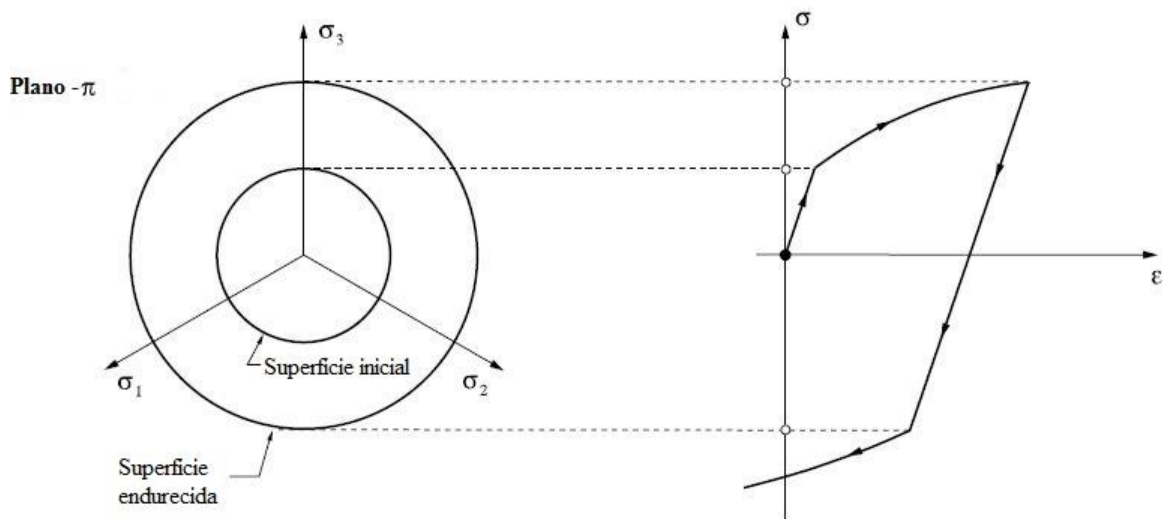


Figura 2-6. Endurecimento isotrópico. Teste uniaxial e representação no plano- $\pi$ . Fonte: De Souza Neto (2008).

## 2.5 MODELO BASEADO NO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

Um dos modelos de estudo da descrição do escoamento plástico em metais mais tradicionais na engenharia trata-se do modelo baseado no critério de escoamento Von Mises. Segundo este modelo, o escoamento plástico inicia-se quando o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras,  $J_2$ , atinge um valor crítico (R. Hill, 1950; De Souza Neto, 2008). A lógica construtiva do modelo de von Mises segue o padrão apresentado na estrutura unidimensional, isto é, os procedimentos metodológicos são os mesmos apresentados anteriormente:

- i. Definir uma função de escoamento;
- ii. Determinar o vetor de fluxo (plasticidade associativa), que determina a direção do fluxo de escoamento plástico;
- iii. Representação tridimensional da lei de fluxo plástico, determinando o tensor de deformação de fluxo plástico;
- iv. Determinar a evolução da deformação plástica equivalente.

Como descrito no fluxograma anterior a montagem do modelo matemático de von Mises se inicia pela escolha da chamada *função de escoamento*. Cabe ressaltar que os modelos tridimensionais são concebidos por uma matemática tensorial, no presente Projeto de Graduação, caracteres em “negrito”

são destinados para tal finalidade. A *função de escoamento* para o modelo baseado no critério de escoamento de von Mises é dado por:

$$\varphi = \sqrt{3J_2(\mathbf{S})} - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}^p \quad 2.25$$

onde  $J_2(\mathbf{S})$  representa o segundo invariante do tensor desviador,  $\sigma_{y0}$  representa a tensão de escoamento inicial do material,  $H^I$  é o módulo de endurecimento e  $\bar{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica equivalente e que faz o papel de variável interna associada ao endurecimento isotrópico.

Uma vez determinada a função de escoamento, em seguida é determinada então a *direção do fluxo plástico* do material, representado matematicamente pela derivada da função de escoamento em função da tensão de carregamento, como apresentado:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2q} \mathbf{S} \quad 2.26$$

onde  $\mathbf{N}$  representa o vetor de fluxo e  $q$  é a tensão equivalente de von Mises, que tem como intenção comparar certa magnitude do estado de tensão com a propriedade material do limite de escoamento, matematicamente representada por:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad 2.27$$

Diferente do modelo uniaxial, no modelo tridimensional o vetor de fluxo representa um vetor propriamente dito, matematicamente a derivada direcional de um tensor é dada por um vetor. Isso significa que as direções preferenciais de escoamento são nas direções cartesianas (ou no sistema de coordenadas representativo). Essa alteração é responsável pelo englobamento dos efeitos de Poisson, estabelecendo relações entre deformações ortogonais.

Uma vez determinada a direção do fluxo plástico, o próximo passo consiste na determinação da taxa de evolução da deformação plástica, que incorpora a *lei de fluxo plástico* do modelo baseado no critério de escoamento de von Mises, determinado matematicamente pela equação :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \frac{3}{2q} \mathbf{S} \quad 2.28$$

A plasticidade associativa é representada por  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  que é chamado de tensor das deformações plásticas.

Dando seguimento ao modelo baseado no critério de escoamento de von Mises, agora deve-se determinar a lei de evolução para outras variáveis internas, representada pela *lei da evolução do fluxo plástico*, a qual determina a *deformação plástica equivalente* matematicamente como sendo:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma} \quad 2.29$$

onde  $\bar{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica acumulada, que para o modelo é dada pelo multiplicador plástico,  $\dot{\gamma}$ .

Segundo De Souza Neto (2008), R. Hill (1950) e Hencky (1924) a interpretação física do modelo baseado no critério de escoamento de von Mises serve para afirmar que escoamento plástico se inicia quando a energia de distorção elástica atinge um valor crítico. Segundo o modelo, a pressão hidrostática do tensor de tensões e o terceiro invariante não possuem contribuição para a sua formulação e apenas a tensão desviadora influência no fluxo plástico. Cabe ressaltar que a pressão hidrostática somente não influencia em casos de metais isotrópicos, em alguns metais anisotrópicos, contudo a pressão hidrostática produz uma distorção elástica, no entanto não é de forma atenuada sendo em quantidades moderadas (Hill, 1950).

Tal como no modelo unidimensional isotrópico, o modelo tridimensional baseado no critério de escoamento de von Mises encontra-se resumido na Tabela 2-2

Tabela 2-2. Resumo do modelo baseado no critério de escoamento de von Mises

	<b>Equação</b>
<b>Decomposição aditiva do tensor de Deformações</b>	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
<b>Lei Elástica</b>	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
<b>Função de Escoamento</b>	$\varphi(\boldsymbol{\sigma}) = q - \sigma_{y0} - H^l \bar{\varepsilon}^p$
<b>Lei de Fluxo Plástico</b>	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \frac{3}{2q} \mathbf{S}$
<b>Lei de Evolução da Deformação Plástica Equivalente, <math>\bar{\varepsilon}^p</math></b>	$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma}$
<b>Regra de complementaridade</b>	$\varphi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \varphi \dot{\gamma} = 0$

### 3. ESTRATÉGIA NUMÉRICA

*São apresentadas as estratégias de formulação numérica para discretização dos modelos matemáticos expostos anteriormente.*

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

O modelo unidimensional isotrópico é regido por um conjunto de equações lineares, onde apenas são exigidas operações vetoriais para sua solução. Para a solução do conjunto de equações adota-se a chamada metodologia da *decomposição do operador* (Simo e Hughes, 1998; De Souza Neto et al., 2008), especialmente adequado para a integração numérica do problema de evolução e têm sido amplamente utilizados na plasticidade computacional, onde o problema é subdividido em duas partes: a primeira consiste em um preditor elástico, o qual o comportamento mecânico do material é assumido como completamente elástico, e que são conhecidos no início do intervalo do pseudo-tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , os valores da deformação elástica,  $\varepsilon_n^e$ , da deformação plástica,  $\varepsilon_n^p$ , além do conjunto de variáveis internas de propriedade mecânica do material, e a segunda parte consiste em um corretor plástico onde um sistema de equações residuais formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução das variáveis internas é resolvido, tomando os valores obtidos na construção do preditor elástico como valores iniciais do problema. A Figura 3-1 apresenta um fluxograma das etapas de solução do problema numérico adotando-se a estratégia apresentada previamente.

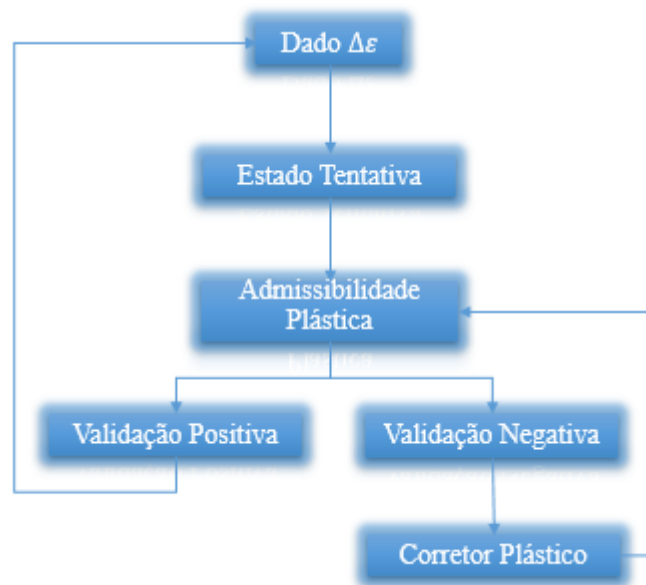


Figura 3-1. Fluxograma da Estratégia Numérica para solução do problema uniaxial.

Portanto, a solução numérica do problema consiste em:

- Sabendo-se as propriedades mecânicas do material como  $E$ ,  $\sigma_{y0}$ ,  $H^I$ , respectivamente módulo de Young ou de elasticidade, tensão limite de escoamento inicial e módulo de endurecimento do material.
- Cálculo de um incremento de deformação,  $\Delta\varepsilon$  como sendo diretamente proporcional a 3 vezes a tensão limite de escoamento inicial e inversamente proporcional ao módulo de elasticidade, para este Projeto de Graduação.
- Início do estado tentativa para um pseudo-tempo,  $t_m$ :

$$\varepsilon_{n+1}^{eT} = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon \quad 3.1$$

$$\sigma_{n+1}^T = E\varepsilon_{n+1}^{eT} \quad 3.2$$

$$\varepsilon_{n+1}^{pT} = \varepsilon_n^p \quad 3.3$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT} = \bar{\varepsilon}_n^p \quad 3.4$$

onde o sobrescrito “T” indica que “tentativa” da incógnita associada e o sobrescrito é referente ao pseudo-tempo, “n” ou “n + 1”, portanto  $\varepsilon_{n+1}^{eT}$  é a deformação elástica total tentativa no pseudo-tempo “n + 1”,  $\varepsilon_n^e$  é a deformação elástica no pseudo-tempo “n”,  $\Delta\varepsilon$  representa o incremento de deformação.  $\sigma_{n+1}^T$  é a tensão tentativa no pseudo-tempo “n + 1”, o módulo de elasticidade é representado por  $E$ . A variável  $\varepsilon_{n+1}^{pT}$  é a deformação plástica tentativa no pseudo-tempo “n + 1”,  $\varepsilon_n^p$  é a deformação plástica,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$  é a deformação plástica acumulada tentativa e  $\bar{\varepsilon}_n^p$  é também a deformação plástica acumulada tentativa, contudo no pseudo-tempo anterior.

- Com o estado tentativa definido, é verificada a admissibilidade plástica:

$$\varphi_{n+1}^T = |\sigma_{n+1}^T| - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_n^p \quad 3.5$$

onde  $\varphi_{n+1}^T$  é a função de escoamento tentativa,  $\sigma_{y0}$  é o limite de escoamento inicial,  $H^I$  corresponde ao módulo de endurecimento, onde ambos correspondem as propriedades mecânicas do material .

- Se  $\varphi_{n+1}^T \leq 0$  o passo é elástico e as variáveis reais são definidas como iguais as variáveis tentativas, caso contrário entra-se no corretor plástico.
- Corretor plástico (algoritmo de retorno)

- Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Rapshon), tendo como variáveis  $\sigma_{n+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$ , e  $\Delta\gamma$ :

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^T + E\Delta\gamma N \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \\ \varphi = |\sigma_{n+1}| - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{cases} \quad 3.6$$

- Atualizar as demais variáveis internas.
- Fim

O modelo esquemático unidimensional de forma resumida encontra-se na Tabela 3-1

Tabela 3-1. Modelo numérico unidimensional com endurecimento isotrópico.

i)	Determinar o estado tentativa: dado um incremento deformação, $\Delta\varepsilon$ :
	$\varepsilon_{n+1}^{eT} = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon;$ $\sigma_{n+1}^T = E\varepsilon_{n+1}^{eT};$
	$\varepsilon_{n+1}^{pT} = \varepsilon_n^p;$ $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT} = \bar{\varepsilon}_n^p;$
ii)	Verificar a admissibilidade plástica:
	$\varphi_{n+1}^T =  \sigma_{n+1}^T  - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_n^p$
	Se $\varphi_{n+1}^T \leq 0$ então ,passo elástico: $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^T$
	Caso contrário, então (passo plástico): algoritmo de retorno:
iii)	Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Rapshon), tendo como variáveis: $\sigma_{n+1}$ , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$ , e $\Delta\gamma$
	$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^T + E\Delta\gamma N \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \\ \varphi =  \sigma_{n+1}  - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{cases}$
iv)	Atualizar outras variáveis internas.
v)	Fim.

O modelo conta também com o corretor plástico, como retratado na Tabela 3-1, “algoritmo de retorno”, que funciona como um processo iterativo na tentativa de resolução numérica do sistema linearizado apresentado na equação 3. 6 escritos na forma residual. O modelo consiste em adotar uma estimativa inicial para o seguimento das iterações, a resolução de um sistema de equações linearizadas pelo método de Newton-Raphson, e por fim a atualização das variáveis residuais. Feito isso, o algoritmo compara a função de escoamento calculada com uma tolerância.

As estimativas iniciais são dadas como segue:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^T \quad 3.7$$

$$\Delta\gamma^0 = 0 \quad 3.8$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT} \quad 3.9$$

onde  $\Delta\gamma$  é o multiplicador plástico e o sobrescrito (0) indica o número da iteração correspondente, começando-se na iteração “0”.

O próximo passo consiste na resolução de um sistema de equações linearizadas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \quad 3.10$$

Nota-se que o sistema apresentado acima é do tipo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , onde adotou-se a solução pelo método da substituição. O sistema matricial apresentado na equação 3. 10 corresponde a aplicação do Newton-Raphson, onde a matriz  $\mathbf{A}$  representa as derivadas das equações residuais, o vetor coluna correspondente a “ $x$ ” representa os incrementos encontrados na solução do Newton-Raphson e o vetor coluna “ $b$ ” corresponde as equações residuais descritas abaixo:

$$R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^T + E\Delta\gamma N \quad 3.11$$

$$R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \quad 3.12$$

$$R_{\Delta\gamma} = |\sigma_{n+1}| - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \quad 3.13$$

O sistema iterativo é processado até uma medida comparativa de um erro com uma tolerância da maneira como apresentado na equação 3. 14

$$erro = \frac{|\varphi|}{\sigma_{y0}} \leq tolerância \quad 3. 14$$

onde para o dado problema a tolerância adotada foi de  $10^{-6}$  e o  $\varphi$  é calculado com os valores obtidos na resolução do sistema de Newton-Raphson.

A Tabela 3-2 apresenta o resumo do algoritmo de retorno para solução do Newton-Raphson.



Tabela 3-2. Algoritmo de retorno (Newton-Raphson).

i)	Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:
	$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^T \quad \Delta\gamma^0 = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$
ii)	Resolver o sistema de equações não-lineares para: $\sigma_{n+1}$ , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$ , e $\Delta\gamma$ :
	$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$
iii)	Calcular:
	$\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)}$ $\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)}$ $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}$
iv)	Verificar a convergência.
	$\varphi_{n+1}^{(k+1)} = \left  \sigma_{n+1}^{(k+1)} \right  - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}$ $erro = \frac{ \varphi }{\sigma_{y0}} \leq tolerância$
v)	Fim.

Durante o algoritmo de retorno é necessário à aplicação do conceito de derivadas parciais das equações residuais, portanto, as derivadas são apresentadas abaixo, para efeito de simplificação os sobescritos foram ignorados:

Para a primeira equação residual:

$$\frac{dR_{\sigma}}{d\sigma} = 1$$

$$\frac{dR_\sigma}{d\varepsilon^p} = 0 \quad 3.16$$

$$\frac{dR_\sigma}{d\Delta\gamma} = EN \quad 3.17$$

Para a segunda equação residual:

$$\frac{dR_{\varepsilon^p}}{d\sigma} = 0 \quad 3.18$$

$$\frac{dR_{\varepsilon^p}}{d\varepsilon^p} = 1 \quad 3.19$$

$$\frac{dR_{\varepsilon^p}}{d\Delta\gamma} = -1 \quad 3.20$$

Para a terceira equação residual:

$$\frac{dR_{\Delta\gamma}}{d\sigma} = N \quad 3.21$$

$$\frac{dR_{\Delta\gamma}}{d\varepsilon^p} = -H^I \quad 3.22$$

$$\frac{dR_{\Delta\gamma}}{d\Delta\gamma} = 0 \quad 3.23$$

### 3.2 MODELO BASEADO NO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

Na chamada plasticidade computacional, o algoritmo de atualização das variáveis por comumente chamado algoritmo de mapeamento de retorno e seu modelo constitutivo é semelhante ao abordado anteriormente para a construção do modelo unidimensional, conhecidos os valores da deformação elástica,  $\varepsilon_n^e$  e do conjunto das variáveis internas no início do intervalo do pseudo-tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , bem como o incremento de deformação prescrito,  $\Delta\varepsilon$ , para este intervalo, é possível a construção do chamado estado tentativa elástico. O modelo constitutivo baseado no critério de escoamento de von Mises é dito como não-conservativo, isto é, é um modelo constitutivo que depende da trajetória, de modo que seja imprescindível a necessidade de formular algoritmos para integração numérica das equações de evolução das variáveis de estado. A estratégia numérica para o modelo visa formular procedimentos de integração numérica capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas no instante de tempo “ $t_n$ ” para que sejam obtidas as variáveis internas no instante de tempo “ $t_{n+1}$ ”, onde o incremento de deformação é uma constante assumida como conhecida.

Segundo Simo e Hughes (1998) a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo  $[t_n, t_{n+1}]$  é aplicada a todos esses modelos, baseado no esquema de Euler implícito. Portanto, com o modelo de Euler implícito aplicado a uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, deve-se também se derivar a matriz tangente consistente com o algoritmo de integração.

Como descrito para o modelo uniaxial, o procedimento da decomposição do operador também é explorado no modelo de elaboração numérica para von Mises, visando a atualização das tensões, com a mesma divisão binária do problema em um preditor elástico e plástico, e a lógica permanece inalterada, as variáveis das equações residuais do preditor plástico são adotadas inicialmente como iguais aos valores obtidos na construção do preditor elástico.

Também é realizada uma conferência da região de escoamento por meio da função de escoamento, que caso seja violada, (numericamente falando maior do que zero) o chamado corretor plástico é então inicializado e o método de Newton-Raphson é utilizado para se resolver o conjunto de equações não lineares discretizado. O método é escolhido para solucionar o problema por atingir uma taxa quadrática de convergência para a solução, o que resulta em um algoritmo de atualização computacionalmente eficiente (Simo & Hughes, 1998; De Souza Neto *et al.*, 2008).

A estratégia inicia-se pela montagem do estado tentativa, dado um incremento de deformação  $\Delta\epsilon$ , desta vez tensorial:

$$\epsilon_{n+1}^{eT} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \quad 3.24$$

$$\sigma_{n+1}^T = D^e : \epsilon_{n+1}^{eT} \quad 3.25$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p \quad 3.26$$

$$q^T = \sqrt{\frac{3}{2} S_{n+1}^T : S_{n+1}^T} \quad 3.27$$

onde  $\epsilon_{n+1}^{eT}$  representa o tensor das deformações elásticas tentativas,  $\sigma_{n+1}^T$  representa o tensor das tensões tentativa,  $\epsilon_{n+1}^{pT}$  o tensor das deformações plásticas equivalente tentativa e  $q^T$  representa um escalar da tensão equivalente de von Mises. Para o caso do modelo baseado no critério de escoamento de von Mises, a chamada deformação plástica equivalente,  $\bar{\epsilon}^p$ , é tomada como variável interna associada ao endurecimento isotrópico. Desta forma, o limite de escoamento do material será então uma função de  $\bar{\epsilon}_n^p$

Em continuidade do modelo constitutivo, o próximo passo consiste em verificar-se a admissibilidade plástica, que verifica matematicamente o domínio do regime em questão, se ele encontra-se dentro do limite elástico, ou dentro de um regime plástico, pela função de escoamento:

$$\varphi^T = q^T - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}^p \quad 3.28$$

onde  $\varphi^T$  representa a função de escoamento, o termo  $q^T$  representa a tensão equivalente tentativa de von Mises definido em função da contribuição desviadora do tensor das tensões tentativa como apresentado na equação 3.27. Os demais termos representam a lei de endurecimento do material. A verificação é a mesma que a feita no regime uniaxial, caso  $\varphi^T \leq 0$  corresponde em um regime elástico de modo que  $\leq 0$  Passo elástico  $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^T$

$$\text{Se } \varphi^T \begin{cases} \leq 0 & \text{Passo elástico } (*)_{n+1} = (*)_{n+1}^T \\ > 0 & \text{Passo plástico: algoritmo de retorno} \end{cases} \quad 3.29$$

O algoritmo de retorno consiste na resolução de sistemas não lineares por meio do método de solução iterativa de Newton-Raphson, tendo como variáveis globais as mesmas já citadas no problema uniaxial:  $\sigma_{n+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$ , e  $\Delta\gamma$ :

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^T - \frac{3 G \Delta\gamma}{q_{n+1}} \mathbf{S}_{n+1} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT} = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \\ \varphi = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1}^T : \mathbf{S}_{n+1}} - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{cases} \quad 3.30$$

Para que o algoritmo de retorno finalize as variáveis são submetidas a um critério de parada da iteração por meio de uma comparação com uma tolerância. O próximo passo, portanto, consiste em fazer a atualização das variáveis internas, tensor deformação e tensor tensão pelo método de Euler implícito:

Para o tensor deformação elástica:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \therefore \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \frac{3}{2q_{n+1}} \mathbf{S}_{n+1} \quad 3.31$$

onde  $\mathbf{N}_{n+1}$  corresponde ao vetor de fluxo plástico.

Para o tensor tensão:

$$\sigma_{n+1} = D^e : \varepsilon_{n+1}^e = D^e : \varepsilon_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma D^e : N_{n+1} \quad \therefore \quad \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^T - \frac{3G\Delta\gamma}{q_{n+1}} S_{n+1} \quad 3.32$$

onde  $G$  é o chamado módulo de cisalhamento, que consiste em uma propriedade mecânica do material.

Para a deformação plástica equivalente:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p \quad \therefore \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \quad 3.33$$

Feito isso, o modelo matemático de von Mises está completamente definido. A Tabela 3-3 apresenta um resumo do modelo matemático de von Mises:

Tabela 3-3. Modelo Matemático de von Mises.

i)	Determinar o estado tentativa: Dado um incremento de deformação, $\Delta \epsilon$ :
	$\epsilon_{n+1}^{eT} = \epsilon_n^e + \Delta \epsilon$ $\sigma_{n+1}^T = D^e : \epsilon_{n+1}^{eT}$ $\epsilon_{n+1}^{pT} = \epsilon_n^p$ $q^T = \sqrt{\frac{3}{2} S_{n+1}^T : S_{n+1}^T}$
ii)	Verificar a admissibilidade plástica:
	$\varphi_{n+1}^T = q^T - \sigma_{y0} - H^I \bar{\epsilon}_n^P$ <p>Se <math>\varphi_{n+1}^T \leq 0</math> então ,passo elástico: <math>(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^T</math></p> <p>Caso contrário, então (passo plástico): algoritmo de retorno:</p>
iii)	Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: $\sigma_{n+1}$ , $\bar{\epsilon}_{n+1}^{pT}$ , e $\Delta \gamma$
	$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^T - \frac{3G\Delta\gamma}{q_{n+1}} S_{n+1} \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \\ \varphi = \sqrt{\frac{3}{2} S_{n+1} : S_{n+1}} - \sigma_{y0} - H \bar{\epsilon}_{n+1}^p \end{cases}$
iv)	Atualizar outras variáveis internas.
v)	Fim.

A montagem do corretor plástico segue a seguinte forma:

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^T \quad \Delta\gamma^0 = 0 \quad \bar{\epsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\epsilon}_n^{pT} \quad 3.34$$

ii) Escrever o sistema de equações não-lineares na forma de equações residuais:

$$\begin{cases} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^T - \frac{3 G \Delta \gamma}{q_{n+1}} \mathbf{S}_{n+1} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma \\ R_{\Delta \gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_{n+1}} - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{cases} \quad 3.35$$

iii) Escrever e resolver o sistema de equações para  $\sigma_{n+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  e  $\Delta \gamma$ , na forma linearizada:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta \gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta \gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \Delta \gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta \gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta \gamma} \end{bmatrix}^k \quad 3.36$$

iv) Calcular:

$$\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta \sigma_{n+1}^{(k+1)} \quad 3.37$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \quad 3.38$$

$$\Delta \gamma^{(k+1)} = \Delta \gamma^{(k)} + \delta \Delta \gamma^{(k+1)} \quad 3.39$$

v) Verificar a convergência

$$\varphi^{(k+1)} = q^{(k+1)} - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \quad 3.40$$

$$erro = \frac{\varphi^{(k+1)}}{[\sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}]} \leq tolerância \quad 3.41$$

vi) Fim.

Realizada a conferência do algoritmo de correção o próximo passo consiste em atualizar as variáveis internas e realizar o procedimento mostrado até o número de incrementos desejado.

As derivadas tensoriais para o algoritmo de Newton-Raphson, usadas para a solução do sistema linearizado são apresentadas abaixo:

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = I^4 + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \quad 3.42$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \mathbf{0} \quad 3.43$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = 2GN_{n+1} \quad 3.44$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbf{0} \quad 3.45$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = 1 \quad 3.46$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -1 \quad 3.47$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = N_{n+1} \quad 3.48$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H^I \quad 3.49$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0 \quad 3.50$$



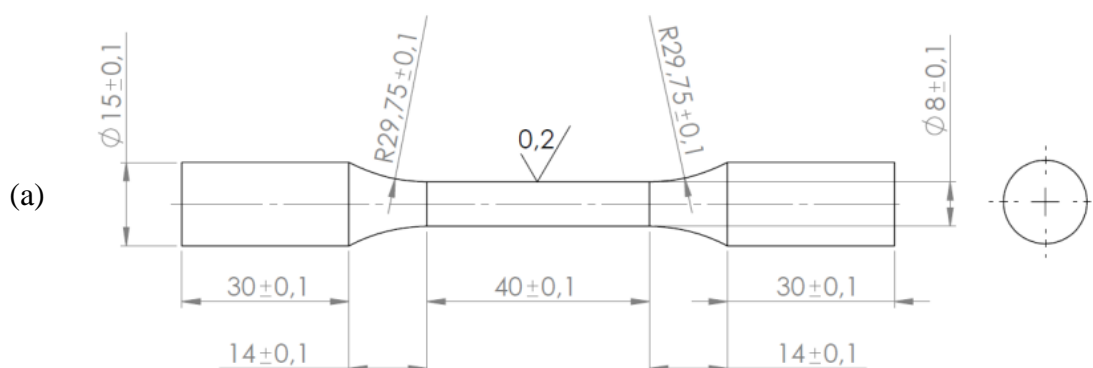
## 4. FABRICAÇÃO DOS CORPOS DE PROVA

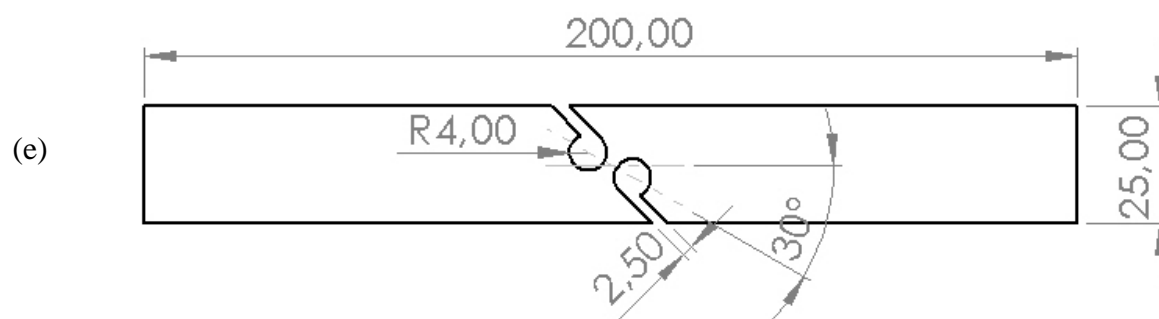
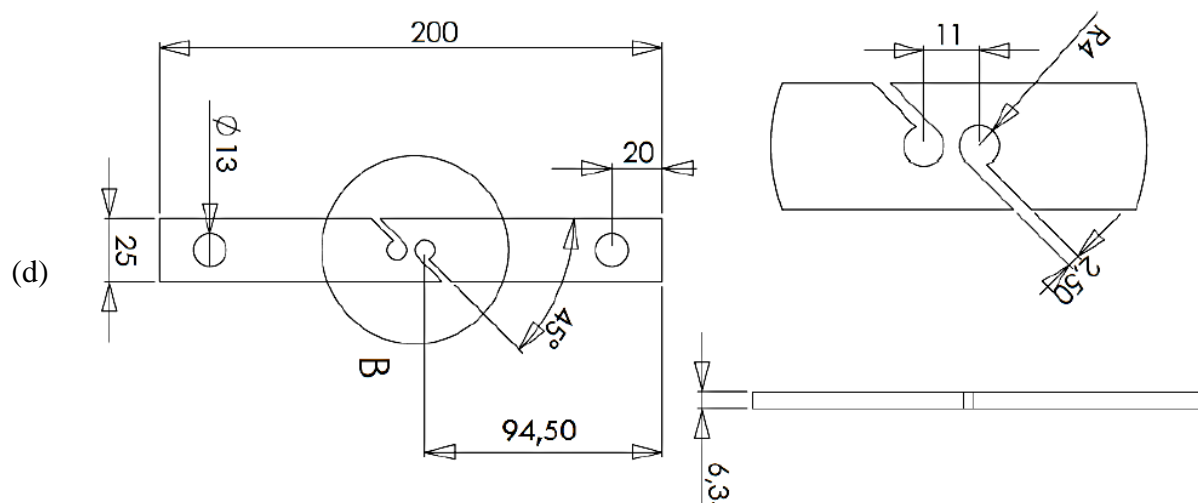
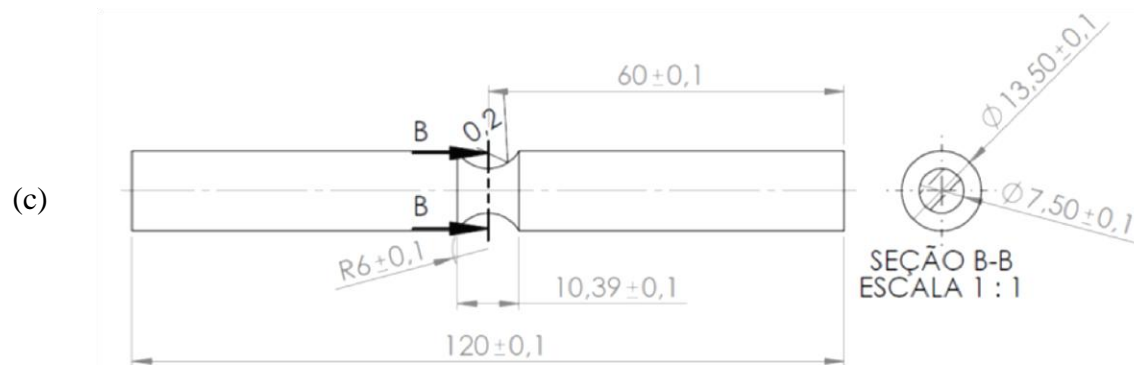
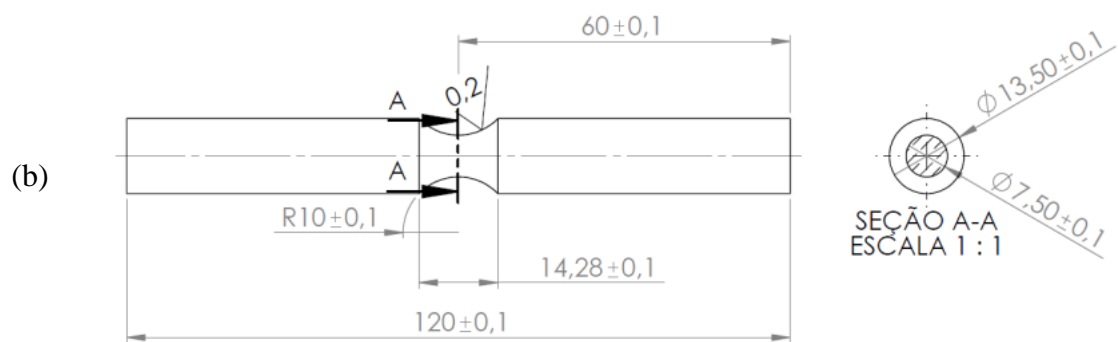
*Este capítulo apresenta os processos de fabricação dos corpos de prova, desde o projeto e modelagem em ambiente CAM até a usinagem.*

### 4.1 GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA

Foram confeccionados corpos de prova cilíndricos liso e entalhados para ensaios sujeitos a carregamentos trativos, corpos de prova retangulares para ensaios de cisalhamento e carregamento combinado, todos fabricados de liga de alumínio 6101. Os corpos de prova cilíndricos foram projetados de maneira a gerar uma tensão de triaxialidade inicial, na região crítica, de 0,33; 0,50 e 0,60; o que representa respectivamente a construção de um corpo de prova cilíndrico liso, com um raio de entalhe de 10 mm e com um raio de entalhe de 6 mm, representando assim uma região de alto nível de tensão de triaxialidade para os corpos de prova. As geometrias estão apresentadas na forma de desenho técnico na Figura 4-1. Foram utilizados corpos de prova cilíndricos de seção transversal cheia.

Para os CP's de cisalhamento e carregamento combinado, foram adotadas três geometrias diferentes, tal qual o modelo estudado por Dremier *et al* (2010), a primeira geometria consiste basicamente em uma chapa retangular de comprimento 200 mm, largura de 25 mm e espessura de 6,35 mm, com um rasgo e um furo no centro. As demais geometrias consistem basicamente de uma variação da primeira, alterando-se a inclinação do rasgo para 30° e 60°. Estas geometrias consideram níveis de tensão de triaxialidade igual a zero, 0,1 e 0,2, respectivamente para uma inclinação igual à 0°, 30° e 60°. Os valores da tensão de triaxialidade são medidas no ponto crítico do corpo de prova, onde se assume a região de maior deformação plástica acumulada. As geometrias dos CPs fabricados seguem as dimensões apresentadas na Figura 4-1.





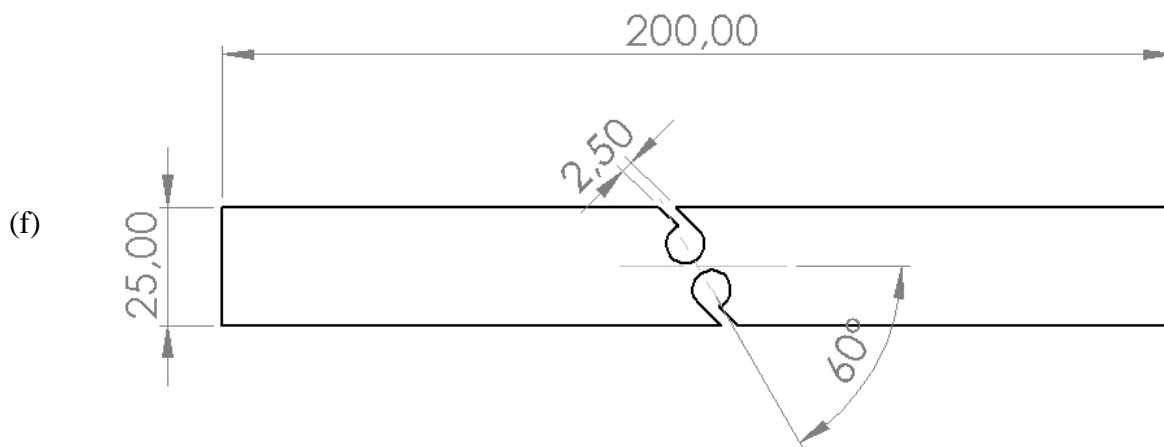


Figura 4-1. Geometrias dos corpos de prova fabricados. (a) CP cilíndrico liso (b) CP cilíndrico com raio de entalhe de 10 mm (c) CP cilíndrico com raio de entalhe de 6 mm. CP de cisalhamento puro (e) CP de carregamento combinado com entalhe inclinado em 30° e (f) CP de carregamento combinado com entalhe inclinado em 60°

Os corpos de prova cilíndricos foram projetados para um comprimento total de 120 mm, sendo considerado como comprimento útil (comprimento o qual experimenta a deformação durante a realização dos ensaios) aproximadamente 40 mm. A relação entre o raio do entalhe e a tensão de triaxialidade inicial foi obtida, de acordo com a equação de Bridgman (Bridgman, 1952). A Figura 4-2 apresenta de forma esquemática as dimensões dos CP's, na região crítica.

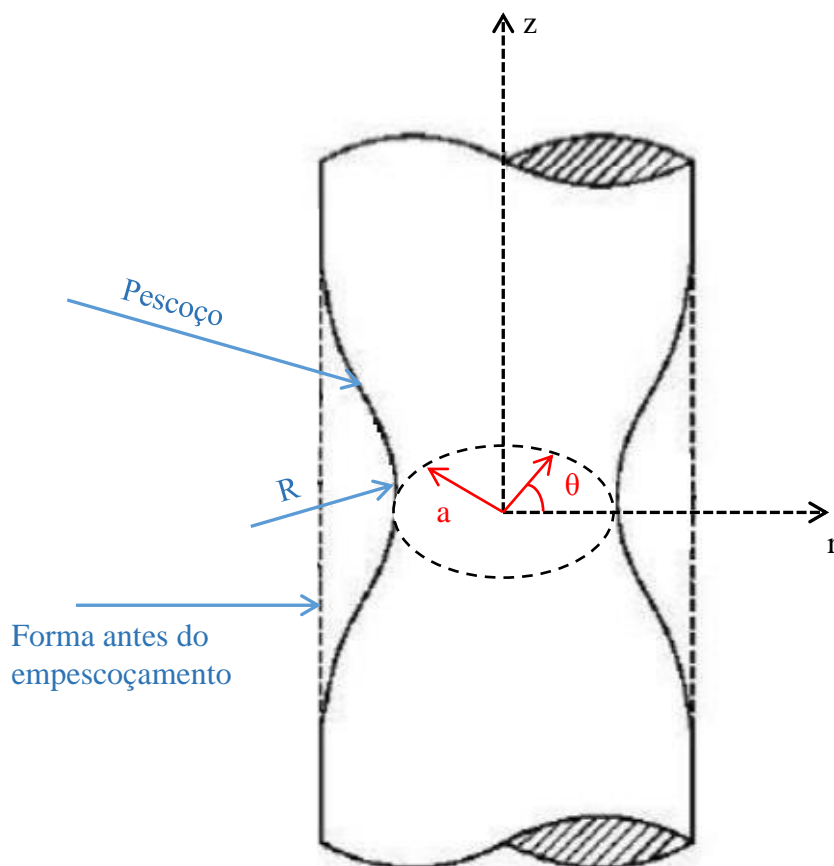
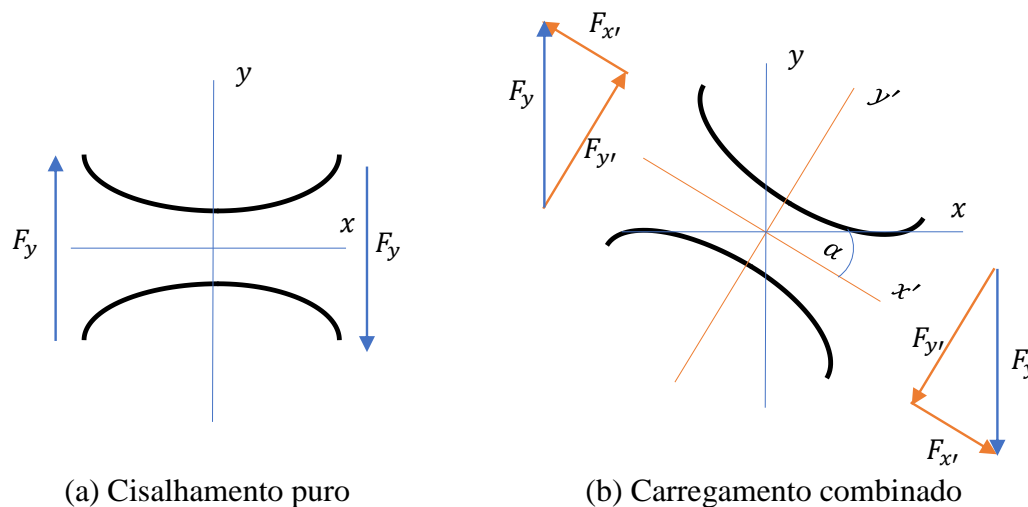


Figura 4-2. Relação geométrica do corpo de prova na região crítica.

A equação que demonstra a relação matemática entre raio do entalhe,  $R$ , tensão de triaxialidade,  $\eta$  e raio do corpo de prova,  $a$  é descrita como:

$$\eta = \frac{1}{3} + \ln \left( 1 + \frac{a}{2R} \right) \quad 4.1$$

As inclinações nos entalhes dos CP's retangulares são responsáveis para uma configuração de força onde se faz presente um carregamento combinado, obedecendo às condições de forças esquematicamente apresentada na Figura 4-3. As tensões de triaxialidade de 0,10 e 0,20 são obtidas através da inclinação da região de ensaio em  $\alpha = 30^\circ$  e  $\alpha = 60^\circ$ , o que leva a carregamentos combinados de tração e cisalhamento.



(a) Cisalhamento puro (b) Carregamento combinado  
Figura 4-3. Representação das forças atuando no CP de cisalhamento e b) Forças no CP de carregamento combinado

De maneira resumida a Tabela 4-1 apresenta os dados de raio de entalhe do corpo de prova / inclinação do entalhe (para o caso de corpo de prova cilíndrico e retangular, respectivamente) tensão de triaxialidade inicial e os valores do terceiro invariante normalizado para todos os CPs utilizados.

Tabela 4-1. Dados iniciais dos corpos de prova utilizados

<i>Descrição</i>	<i>R [mm] / <math>\alpha</math></i>	<i>Tensão de triaxialidade [<math>\eta</math>]</i>	<i>Terceiro invariante normalizado [<math>\xi</math>]</i>
<b>CP de cisalhamento</b>	0°	0	0
<b>CP combinado 30°</b>	30°	0,10	0,15
<b>CP combinado 60°</b>	60°	0,20	0,50
<b>CP cilíndrico liso</b>	-	0,33	1
<b>CP cilíndrico entalhado</b>	10	0,50	1
	6	0,60	1

## 4.2 PARÂMETROS DE USINAGEM

Para os corpos de prova cilíndricos, tanto liso quanto entalhado, foi utilizada a pastilha de aço rápido DCMT 07 02 04-UM da Sandvik. Para evitar o aquecimento e cristalização do material foi realizado o resfriamento usando óleo solúvel biodegradável. No desbaste foi usada uma velocidade de corte de 250 mm/min, com avanço de 0,15 mm/rot e uma profundidade de corte de 0,5 mm, na etapa de acabamento foi utilizada uma velocidade de 350 mm/min, com avanço de 0,8 mm/rot e a mesma profundidade de corte.



Para os corpos de prova retangulares foi usada a fresa DIN 844L C273 de topo reto de 2 mm de diâmetro, de 4 cortes, sendo usada rotação de 6000 rpm para a realização dos furos.

Para o projeto de usinagem utilizou-se o software *Mastercam X9*, fazendo-se as definições da geometria da peça, tipo de ferramenta e parâmetros de usinagem. A Figura 4-4 mostra as definições da fresa de topo reto de 2 mm dentro do software Mastercam X9.

### Define End Mill

Adjust geometric properties used to define the tool shape.

Overall dimensions	
Cutting diameter:	2
Overall length:	75
Cutting length:	50

Tip / corner treatment	
	

Non-cutting geometry	
Shoulder length:	60
Shoulder diameter:	2
Shank diameter:	2

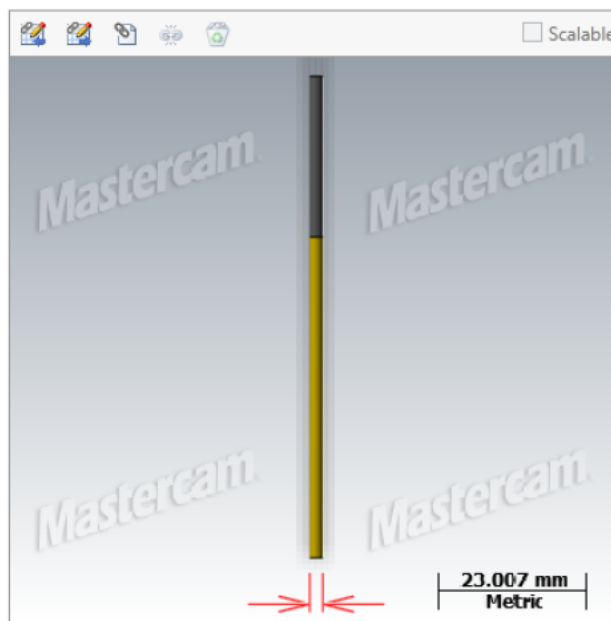


Figura 4-4. Definições da ferramenta de topo reto de 2 mm.

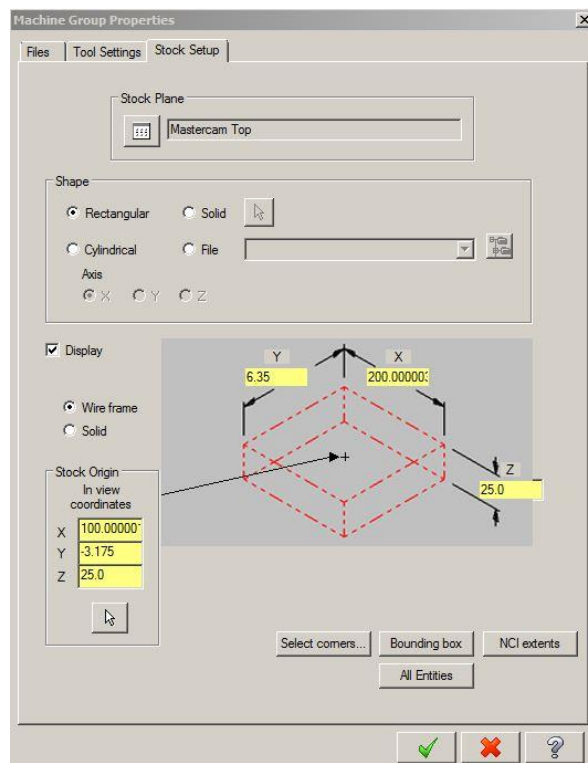
## 4.3 PROGRAMAÇÃO EM AMBIENTE CAM

A programação em CAM serve para construir o código utilizado durante o processo de usinagem na máquina CNC. Os passos para o projeto de usinagem dos corpos de prova são:

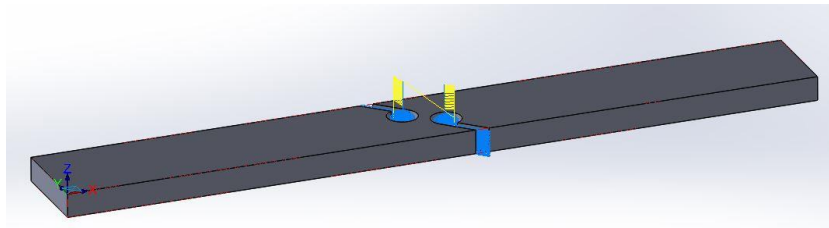
1. Importar a geometria, caso seja a versão do Mastercam X9 que não abra diretamente no Solid Work.
2. Definir o zero da peça. Este passo consiste em adotar um local de referência que será usado para definir o local de posicionamento da ferramenta na peça. A definição do zero da peça pode variar, no entanto, deve-se ter em mente que as orientações dos eixos *X*, *Y* e *Z* são todas baseadas no zero da peça.
3. Definição da ferramenta. Dentro do Mastercam X9 existe um conjunto de ferramentas disponíveis, no entanto, para o caso, a ferramenta de fresa de topo reto de 2 mm não encontra-se disponível, e, para isso, definiu-se a ferramenta, como mostrado na Figura 4-4.
4. Definição do material.
5. Definição do bloco. O bloco consiste em uma geometria que delimita o corpo de prova indicando os limites ao qual a ferramenta se submete para efetuar o trabalho.
6. Definir os modos de usinagem. Nesta etapa ocorre a indicação dos processos de usinagem que se deseja realizar, sendo definidos os caminhos de usinagem que serão executados pela máquina.

Os processos listados acima são apresentados na Figura 4-5, mostrados dentro do programa Mastercam X9. Para os corpos de prova retangular com inclinação de 30° e 60°, primeiramente serão usinados os furos no centro, com um passe de 0,5 mm, pelo fato de estar retirando material em todo o diâmetro da ferramenta e na sequência, realiza-se o rasgo que vai do furo de centro a extremidade da peça.

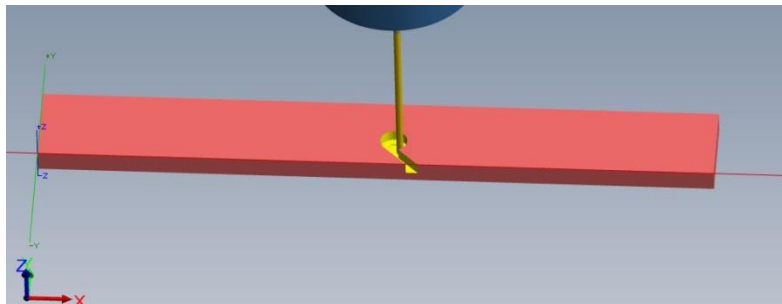
(a)



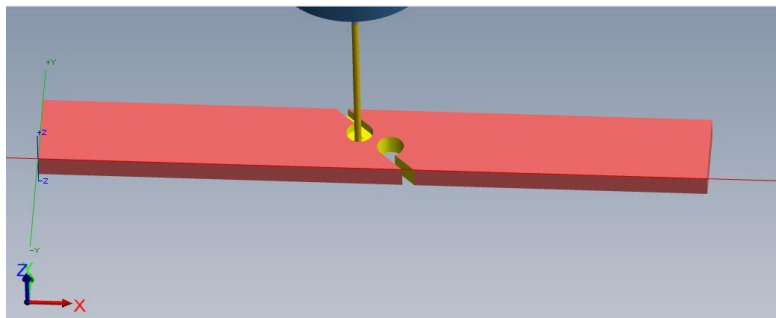
(b)



(c)



(d)



(e)

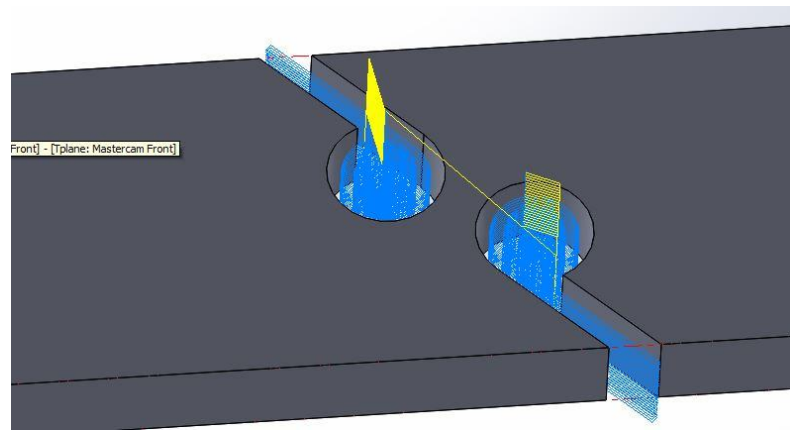


Figura 4-5. Etapas do projeto do corpo de prova no Mastercam X9. (a) Definição do zero peça e do bloco; (b) caminhos de usinagem para CP combinado 30°; (c) simulação de usinagem do primeiro entalhe; (d) simulação da usinagem com primeiro entalhe realizado; (e) detalhe do caminho de usinagem para o CP combinado 60°.

Além dos caminhos de usinagem e da simulação, o *Mastercam X9* também gera o código G que será lido pelo CNC, em linguagem FANUC. Para isso, o arquivo deve ser salvo em um pen drive em um formato correspondente (extensão NC) e importado para a máquina. Na Figura 4-6, pode ser visto um trecho do código gerado para a usinagem do CP de cisalhamento em máquina de tração, onde a letra “G” significa um comando para a máquina, por exemplo, “G0” é avanço em velocidade máxima até certo ponto, “X”, “Y” e “Z” são as coordenadas cartesianas, F é o avanço.



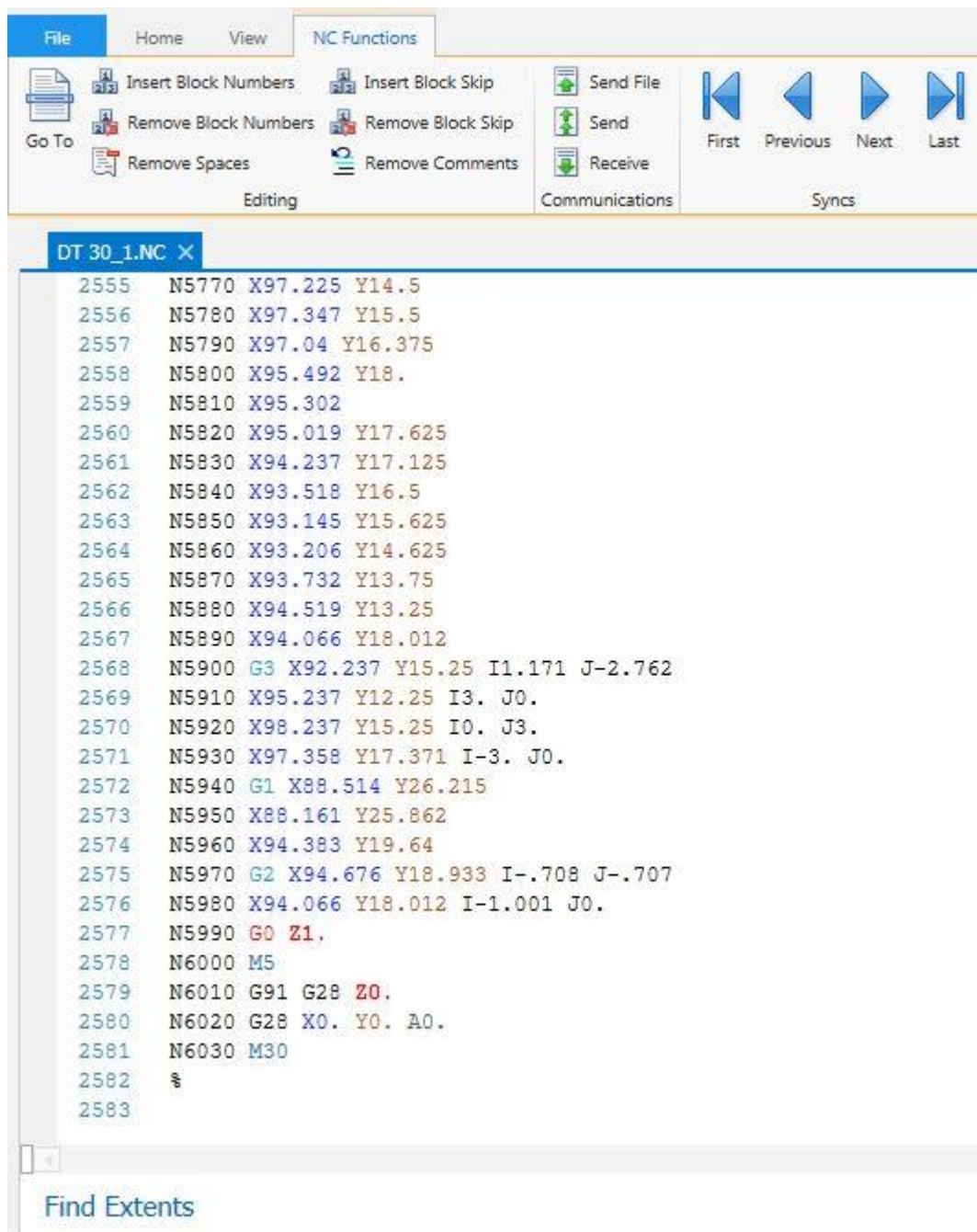


Figura 4-6. Trecho do código em linguagem FANUC gerado.

#### 4.4 USINAGEM DOS CORPOS DE PROVA

A próxima etapa do processo de fabricação dos corpos de prova consiste na usinagem de cada um. O corpo de prova cilíndrico (Figura 4-7 c), foi usinado no laboratório de usinagem do Centro Universitário UDF, Brasília, utilizando um torno CNC (ENCO Concept Turn 105, Figura 4-7 a). A Figura 4-7 (b) apresenta o processo de usinagem em execução.



(a) Torno CNC



(b) Usinagem do corpo de prova



(c) Corpo de prova depois de usinado

Figura 4-7. Detalhes da usinagem do CP.

Os corpos de prova retangulares foram usinados numa fresadora CNC disponível no laboratório da engenharia mecânica da UnB, SG 09. Na Figura 4-8 encontram-se os procedimentos de usinagem dos CP's, com a identificação da Máquina Fresadora CNC (Figura 4-8 a), as chapas de alumínio 6101 para confecção do CP (Figura 4-8 b), a fresa de topo reto de 2 mm de diâmetro, (Figura 4-8 c), a fresa presa no mandril (Figura 4-8 d), o detalhamento da fixação da chapa na CNC, que foi fixado por meio de porcas de pressão (Figura 4-8 e) e a bancada de usinagem montada, com a chapa, ferramenta de corte e sistema de lubrificação (Figura 4-8 f).



Figura 4-8. Procedimentos de usinagem do CP de cisalhamento e carregamento combinado.

## 5. DADOS EXPERIMENTAIS E PROCEDIMENTOS DE CALIBRAÇÃO

*Este capítulo apresenta os resultados observados em ensaios experimentais e simulações numéricas realizadas.*

### 5.1 MODELO UNIDIMENSIONAL ISOTRÓPICO

O modelo unidimensional é um problema com geometria e características bem definidas, os efeitos de Poisson são desprezados de modo a facilitar a parametrização do modelo. Os resultados foram avaliados apenas numericamente, com intuito de se avaliar a proximidade dessa construção mais simples com um modelo mais complexo. As análises observadas mostram que o comportamento do material é próximo ao observado em modelos experimentais reais, de modo que, para uma iniciação no estudo do comportamento elastoplástico, o modelo unidimensional é bastante satisfatório.

A título de aprendizagem foi proposto um problema uniaxial cujo Módulo de Elasticidade fosse de  $200 \times 10^3$  MPa, o Limite de Escoamento de 100 MPa e o Módulo de Endurecimento fosse de  $10 \times 10^3$ . Os resultados observados encontram-se em conformidade com o previsto em Bibliografia e é apresentada a curva de Tensão Deformação na Figura 5-1:

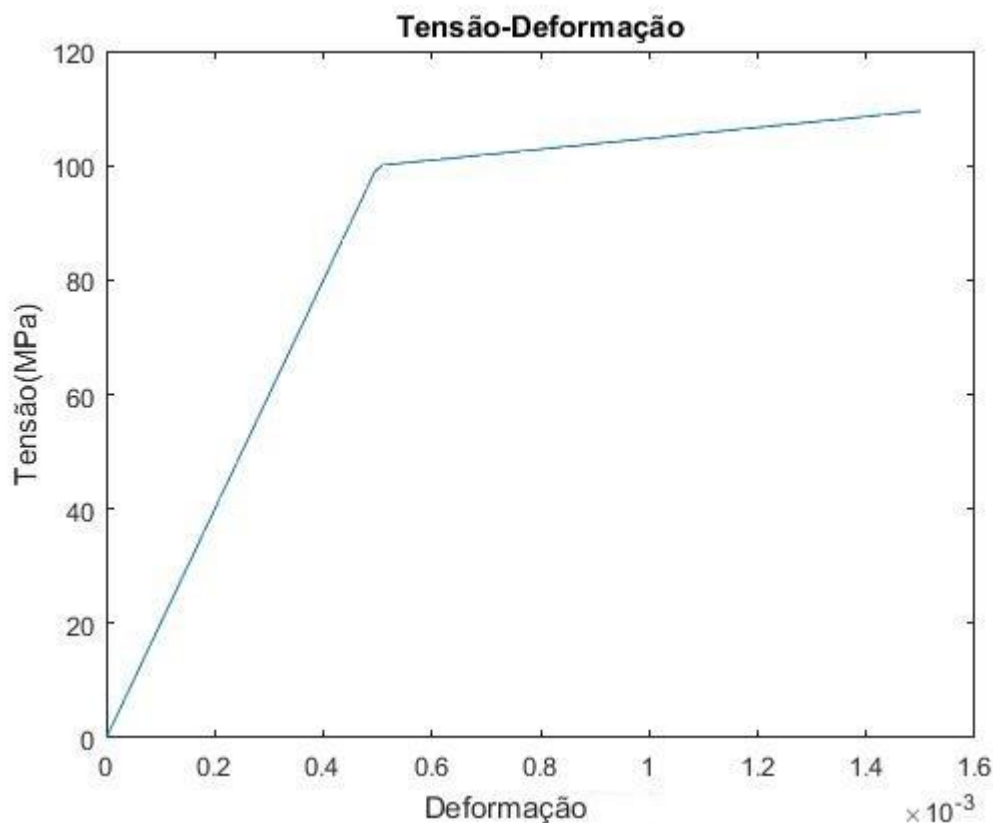


Figura 5-1. Resultado numérico do modelo unidimensional.

Uma observação importante encontrada durante as simulações é o fato de que quanto maior o número de incrementos, mais próximo do modelo real. Isto ocorre por conta de que o incremento está diretamente ligado à construção do caminho percorrido pelo gráfico, de modo que a inclinação da reta seja sensível ao incremento.

## **5.2 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS**

### **5.2.1 Ensaios de Tração**

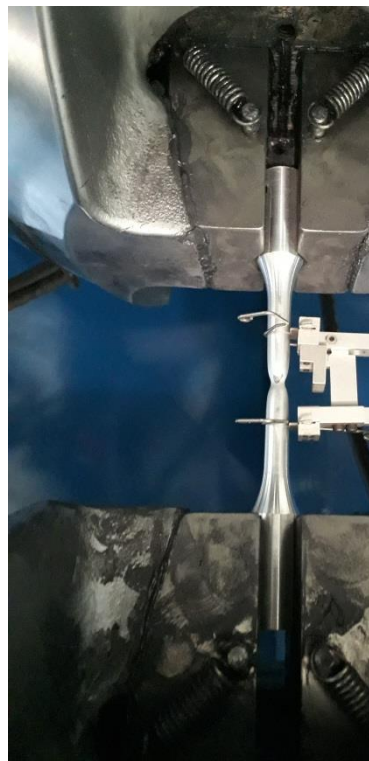
Os ensaios de tração foram realizados no laboratório de ensaio de materiais da Universidade de Brasília, utilizando-se a máquina de ensaio uniaxial MTS 810, equipamento que dispõe de uma capacidade de carga de 100 kN. A deformação na região de ensaio dos CPs foi verificada com ajuda de um extensômetro uniaxial MTS com faixa que varia de -10% a 20%, sendo o comprimento de medição igual a 25 mm, no caso dos CPs cilíndricos.

Os ensaios de tração, foram realizados com controle de deformação, utilizando-se de um extensômetro até a ruptura do CP. A taxa de deformação com o qual a máquina traciona a peça é controlada como sendo de 0,5 mm/min até o escoamento e 1 mm/min após o escoamento. A pressão das garras utilizada foi de 2,5 MPa. Quando foi atingida a deformação de 15%, o ensaio foi interrompido para a retirada do extensômetro, para fins de preservação do equipamento. Após a retirada do extensômetro, o ensaio continuou até a ruptura do CP.

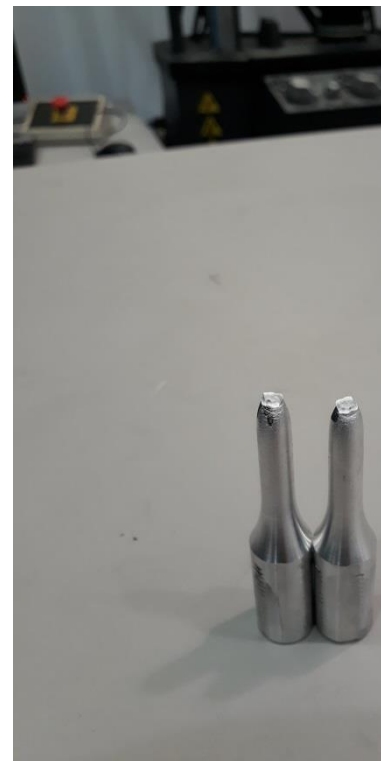




(a)



(b)



(c)

Figura 5-2. Ensaio de tração para o CP cilíndrico.

A Figura 5-2 apresenta os detalhes do ensaio experimental para tração dos corpos de prova cilíndricos, mostrando o posicionamento do CP na MTS 810 (Figura 5-2 a), o decorrer do ensaio evidenciando-se a deformação do alumínio (Figura 5-2 b) e o resultado final do CP partido (Figura 5-2 c).

### **Ensaio de Cisalhamento.**

Os ensaios de cisalhamento também foram realizados no laboratório de ensaio de materiais da Universidade de Brasília - UNB, na máquina de ensaio uniaxial MTS 810.

Nos ensaios de cisalhamento, a pressão das garras foi de 6 MPa, a velocidade de avanço de 1 mm/min, para o dado caso, não foi utilizado extensômetro, pois a região de interesse (faixa de escoamento) é maior do que o alcance do extensômetro.



(a)



(b)



(c)

Figura 5-3. Ensaio de cisalhamento.

Na Figura 5-3 (a) é representado o posicionamento do CP na máquina MTS 810, na Figura 5-3 (b) é mostrado o ensaio em seu seguimento, com o início do alongamento do CP sendo avaliado, e na Figura 5-3 (c) é apresentado o resultado final do experimento, com o CP já escoado.

Os dados coletados com o experimento (deformação, força e deslocamento) foram exportados para um editor de planilhas, para fins de tratamento e descrição.

### 5.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Após a realização dos ensaios experimentais a Figura 5-4 e Figura 5-5 apresentam os gráficos Força-Deslocamento dos corpos de prova cilíndricos usinados a partir do Alumínio 6101.

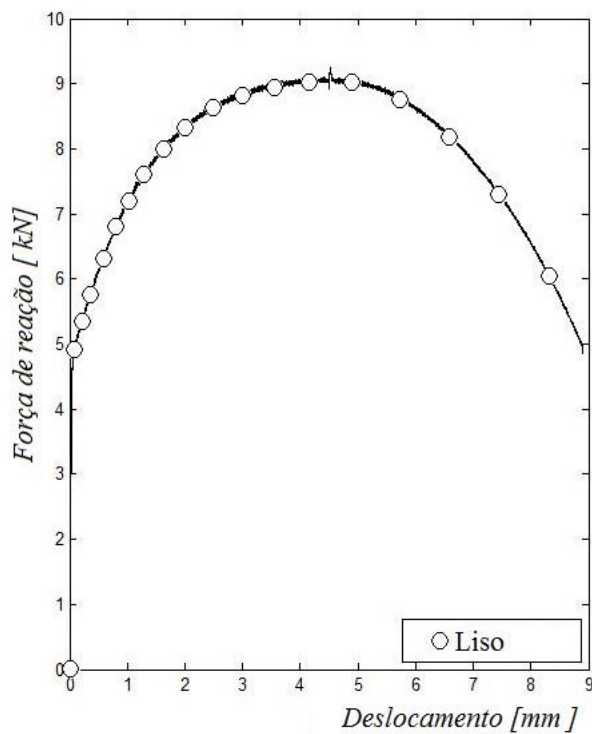


Figura 5-4. Gráfico Força – Deslocamento para o corpo de prova cilíndrico liso.

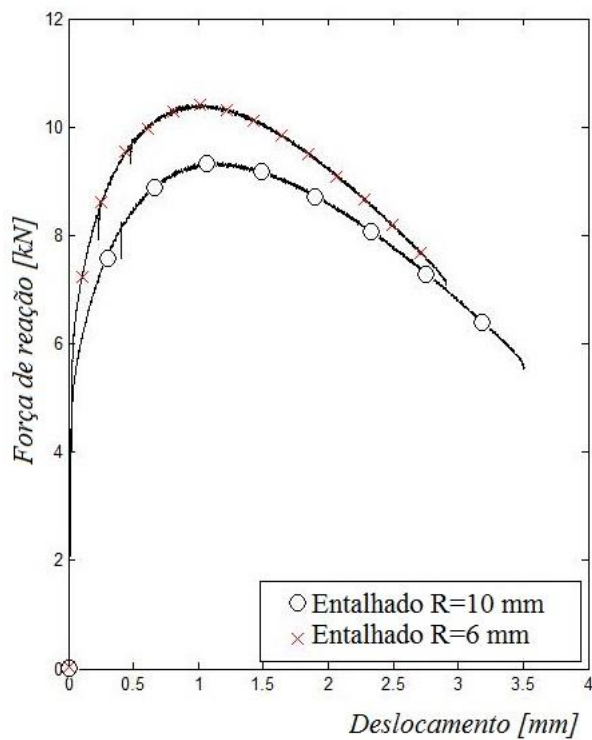


Figura 5-5. Curva de Força-Deslocamento para os CP's entalhados com **R = 6 mm** e **R = 10 mm**

A Figura 5-6 e Figura 5-7 apresentam os resultados dos ensaios de cisalhamento puro e carregamento combinado, com  $\alpha = 30^\circ$  e  $\alpha = 60^\circ$ .



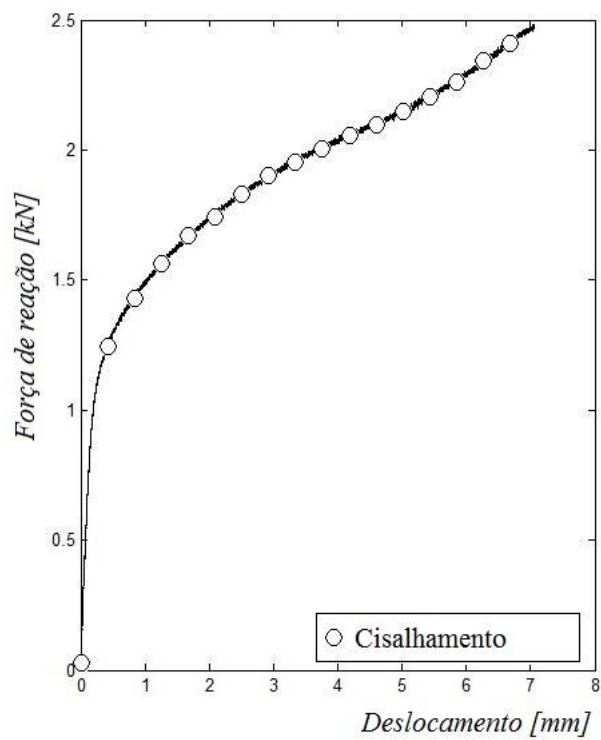


Figura 5-6. Gráfico Força – Deslocamento para cisalhamento puro.

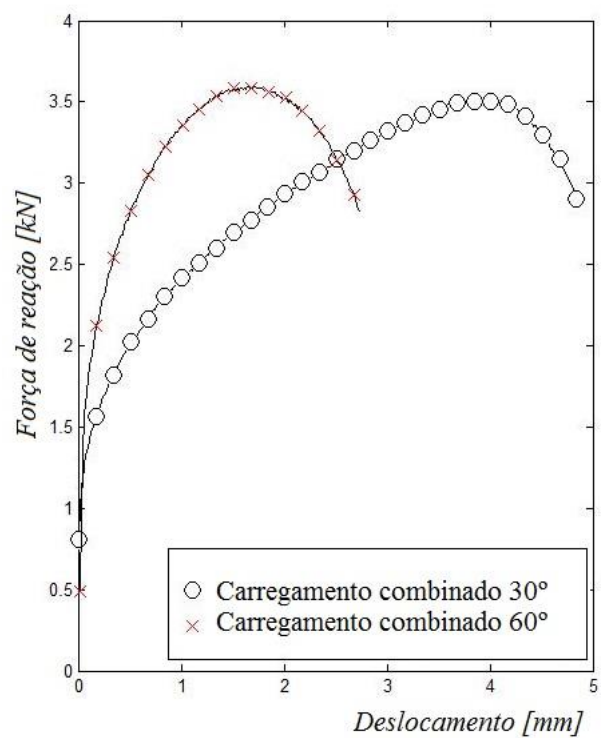


Figura 5-7. Gráfico Força-Deslocamento para os CP's de carregamento combinado com  $\alpha = 30^\circ$  e  $\alpha = 60^\circ$



Figura 5-8. Corpos de prova cilíndricos e retangulares, após a fratura.

O principal dado obtido mediante a interpretação dos gráficos de força versus deslocamento para os corpos de prova ensaiados é o deslocamento na fratura, portanto, a Tabela 5-1 apresenta de forma resumida os deslocamentos na fratura de cada uma das configurações geométricas ensaiadas, bem como os dados de tensão de triaxialidade inicial e terceiro invariante normalizado.

Tabela 5-1. Níveis de deslocamento na fratura experimentalmente observados

<i>Corpo de prova</i>	<i>Tensão de triaxialidade</i>	<i>Terceiro invariante normalizado</i>	<i>Deslocamento na fratura [mm]</i>
<b>Cisalhamento</b>	0	0	7,0
<b>Combinado <math>\alpha = 30^\circ</math></b>	0,10	0,15	4,5
<b>Combinado <math>\alpha = 60^\circ</math></b>	0,20	0,50	2,7
<b>Liso</b>	0,33	1	8,9
<b>Entalhado <math>R = 10 \text{ mm}</math></b>	0,50	1	3,5
<b>Entalhado <math>R = 6 \text{ mm}</math></b>	0,60	1	2,9

#### 5.4 PROCEDIMENTOS DE CALIBRAÇÃO E DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MATERIAL

Para o processo de calibração, foram utilizados dois estados de tensão para obtenção dos parâmetros do material. No primeiro processo, a calibração foi realizada adotando-se como parâmetros os dados obtidos mediante ao ensaio de tração sobre o corpo de prova cilíndrico liso, com razão de triaxialidade inicial de 0,33. Já no segundo processo, assumiu-se o ensaio de cisalhamento puro sobre

o corpo de prova retangular, com razão de triaxialidade inicial igual a zero. O primeiro ponto de calibração localiza-se em uma região de alta tensão de triaxialidade, e o segundo ponto de calibração na região de baixa tensão de triaxialidade, como observado na Figura 5-9:

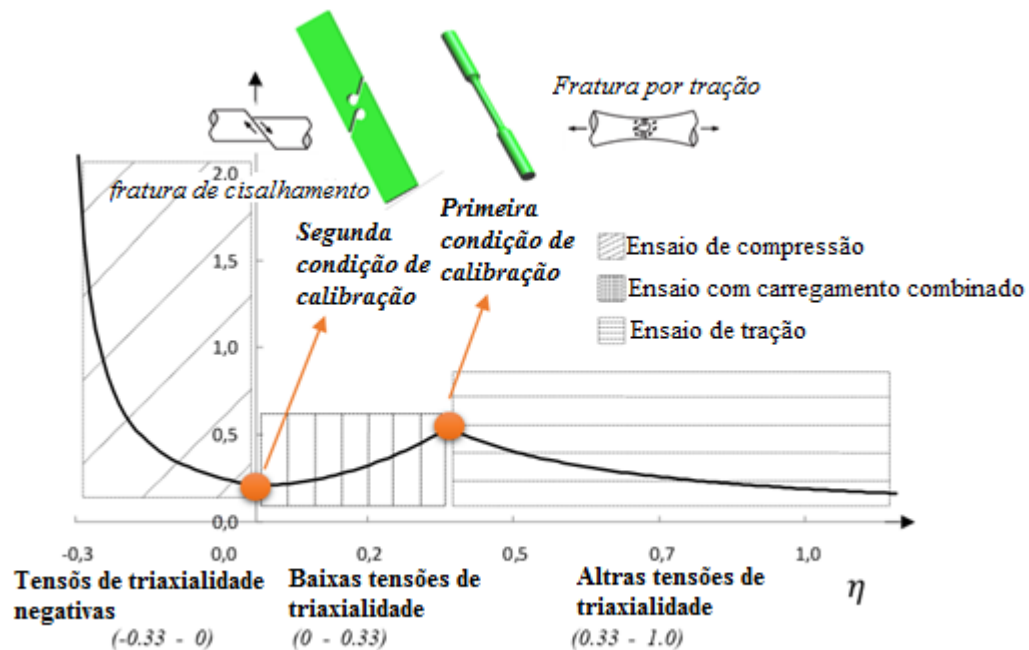


Figura 5-9. Condições de calibração para descrição do comportamento mecânico.

O procedimento para se determinar os parâmetros materiais do alumínio 6101 utiliza uma abordagem de otimização inversa, onde um ensaio experimental do corpo de prova sujeito à carregamento de tração pura é tomado como referência inicial do processo de aquisição de dados para as curvas de encroamento. O procedimento seguinte consiste em um esquema de otimização inversa da curva Força-Deslocamento para que esta represente com bastante acurácia o modelo obtido experimentalmente. O esquema de otimização consiste basicamente em interpolação associativa para caracterização, como observado em métodos como “Mínimos Quadrados”, “Splines” e etc, no entanto, consiste em uma metodologia específica para o caso. Uma vez completa a otimização, o conjunto dos parâmetros materiais obtidos ao fim do processo são utilizados como parâmetros de entrada para os modelos constitutivos a serem simulados posteriormente, dando início a um esquema iterativo.

Os corpos de prova foram modelados de forma a representar um ensaio submetendo os mesmos à um deslocamento até a falha, de acordo com observações experimentais (Bai,2008). A identificação dos parâmetros dos materiais foi realizada por meio do método inverso de identificação paramétrica: Tal método leva em consideração a curva de reação experimentalmente obtida para o corpo de prova cilíndrico liso a modelagem do problema via método dos elementos finitos, um método multivariável baseado no gradiente (Machado, 2018) e a equação de Kleiner mann, que considera a descrição da curva de endurecimento isotrópico do material através de quatro parâmetros, matematicamente a equação de Kleiner mann é descrita como:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + \xi \bar{\varepsilon}^p + (\sigma_{\infty} - \sigma_y)(1 - \exp(-\delta \bar{\varepsilon}^p)) \quad 5.1$$

onde  $\sigma_y$  representa o limite de escoamento do material,  $\sigma_{y0}$  é o limite de escoamento inicial,  $\bar{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica equivalente e o conjunto  $\xi$ ,  $\sigma_{\infty}$  e  $\delta$  representa parâmetros de ajustes da curva.

A identificação paramétrica foi feita utilizando o ensaio de tração como ponto de calibração e também o ensaio de cisalhamento. Inicialmente foi realizado um ensaio numérico no material calibrado com os parâmetros de tração, a fim de verificar as discrepâncias no modelo baseado no critério de escoamento de von Mises quando feita a simulação de cisalhamento. Em segundo momento, o procedimento foi o mesmo, agora ensaiado com os parâmetros de cisalhamento.

Os parâmetros de calibração finais obtidos, usados na equação 5.1 encontram-se na Tabela 5-2

Tabela 5-2. Parâmetros de calibração.

Parâmetro	Unidade	Ensaio de tração	Ensaio de cisalhamento
$\sigma_{y0}$	[MPa]	96,13	83,103
$\xi$	[MPa]	63,20	164,721
$\sigma_{\infty}$	[MPa]	220,87	107,212
$\delta$	[MPa]	12,147	39,23
$E$	[MPa]	65554	65554
$\nu$		0,3	0,3
<b>Alongamento percentual máximo</b>	[%]	35,6	-

Para ilustrar os parâmetros de calibração, a Figura 5-10 mostra as superfícies de escoamento utilizadas, evidenciando os pontos de calibração em tração, (com  $\sigma_{y0} = 96,13$ ) e em cisalhamento (com  $\sigma_{y0} = 83,103$ ).

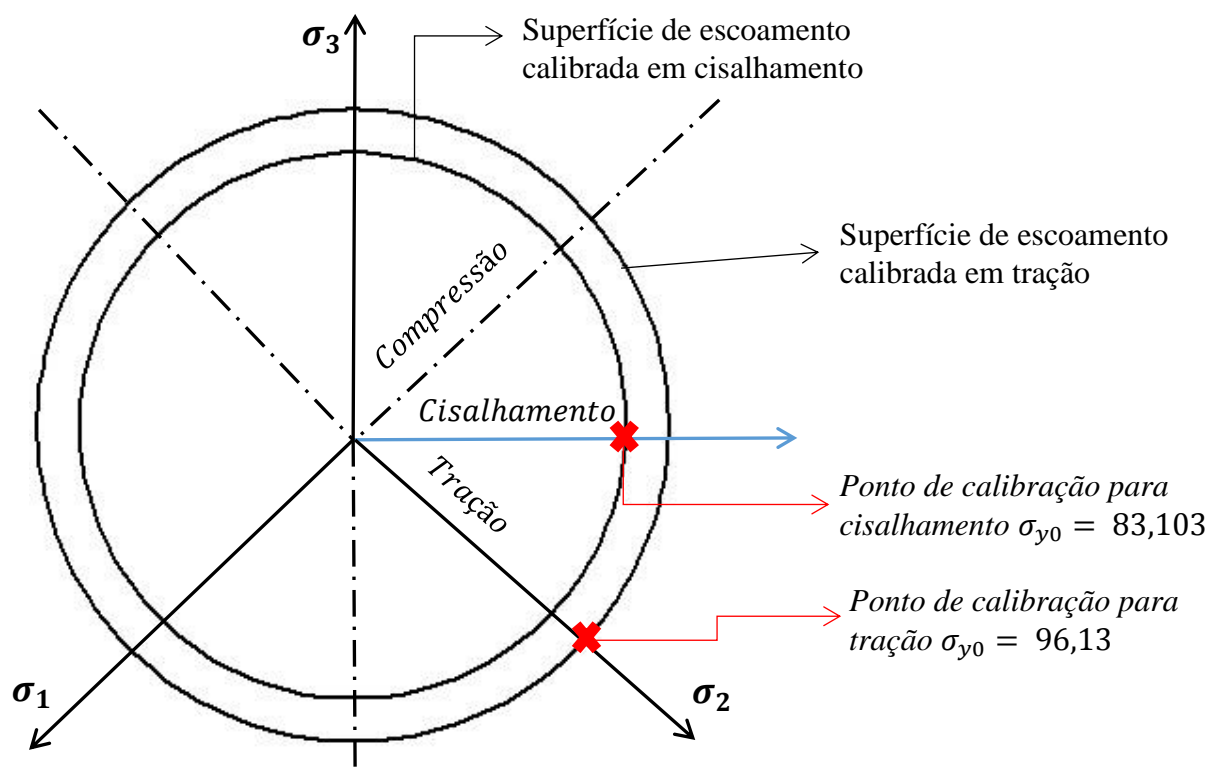


Figura 5-10. Superfícies de escoamento e pontos de calibração.

## 6. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

*Este capítulo apresenta os resultados observados em ensaios experimentais e simulações numéricas realizadas*

### 6.1 DEFINIÇÃO DAS MALHAS

As simulações numéricas foram realizadas por meio de um software acadêmico de elementos finitos, chamado *Hyplas*, levando-se em consideração grandes deformações e a integração implícita do modelo constitutivo, que inclui o critério de escoamento de von Mises, endurecimento isotrópico não linear e plasticidade associativa. Cabe ressaltar que a modelagem proposta foi escrita com base na teoria de pequenas deformações, contudo, utilizou-se o algoritmo de transformação para grandes deformações, proposto por De Souza Neto (2008).

O corpo de prova cilíndrico é uma geometria axisimétrica, de modo que seja possível simplificações na construção da malha da geometria, portanto, foi utilizado um elemento finito quadrilateral de oito nós (QUAD8) e integração reduzida. A Figura 6-1 mostra a malha em elementos finitos para os corpos de prova cilíndricos.

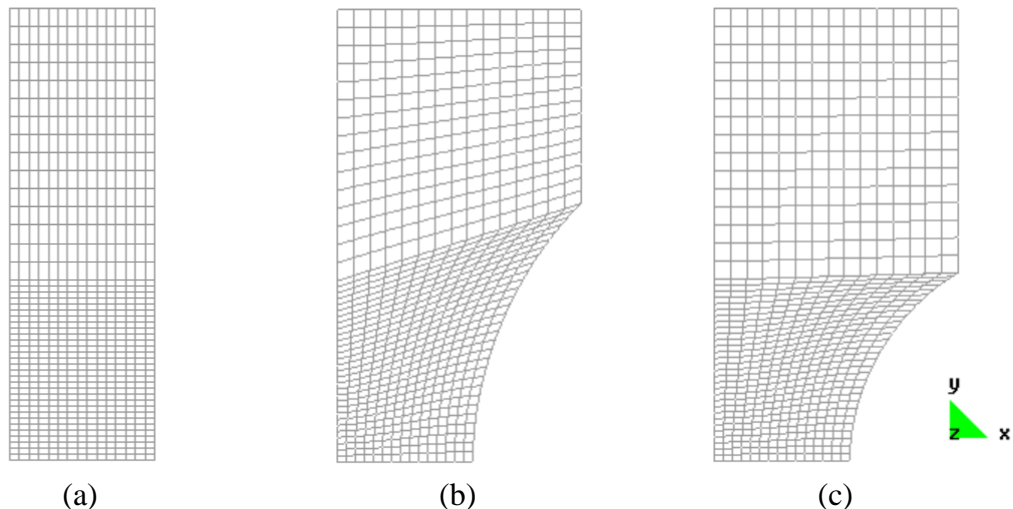


Figura 6-1. Malhas de elementos finitos para os CPs cilíndricos. (a) cilíndrico liso, (b) cilíndrico entalhado  $R = 10 \text{ mm}$  e (c) cilíndrico entalhado com  $R = 6 \text{ mm}$ .

A complexidade geométrica dos corpos de prova de cisalhamento e carregamento combinado faz com que seja necessário abordar o problema em elementos finitos como tridimensional. Desta forma, os CP's foram modelados por elementos finitos hexaédricos de oito nós (HEX8) com integração completa. A Figura 6-2 ilustra a malha de elementos finitos utilizada para o corpo de prova de cisalhamento.

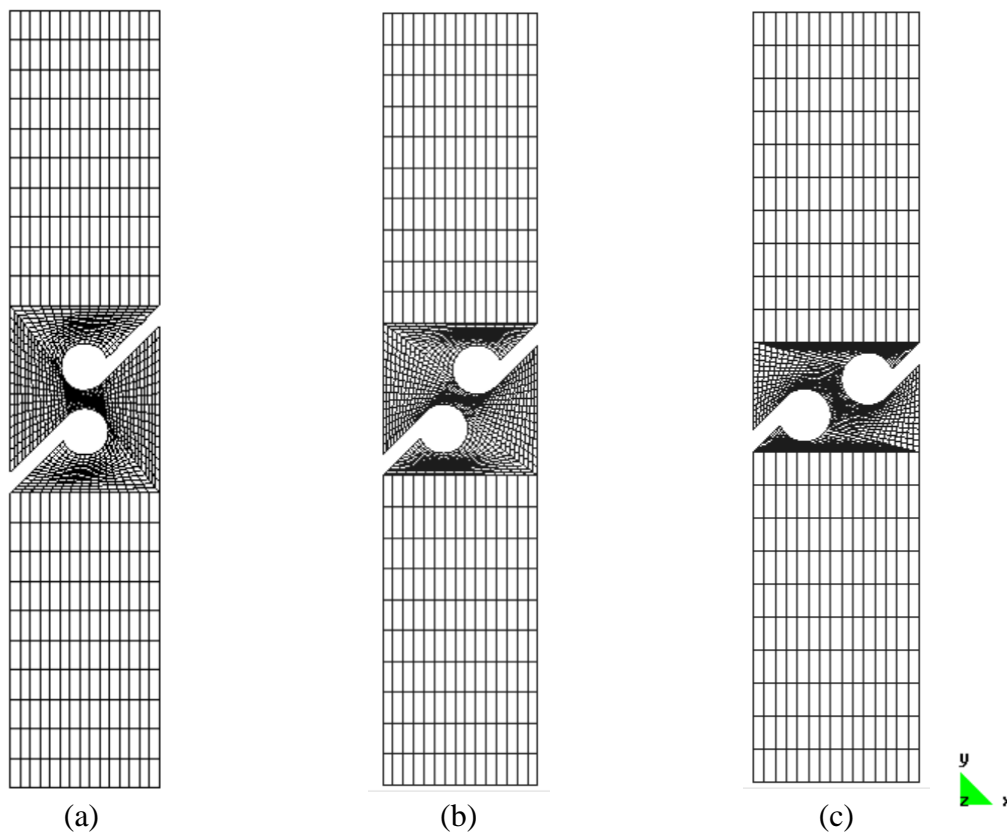
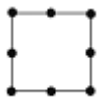
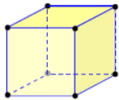


Figura 6-2. Malha de elementos finitos para os CP's de (a) cisalhamento, (b) combinado com  $\alpha = 30^\circ$  e combinado com  $\alpha = 60^\circ$ .

Na configuração do arquivo de entrada do Hyplas, são definidas algumas características importantes, como as propriedades mecânicas do material em estudo (Alumínio 6101), o tipo de elemento finito, o número de nós por cada elemento, o número de nós e o tipo de solução do algoritmo de retorno, definido como o método de Newton-Raphson. A Tabela 6-1 apresenta o resumo das principais variáveis de entrada do algoritmo de iteração matemática do Hyplas.

Tabela 6-1. Descrição dos Elementos de Cada CP.

Corpo de Prova	Elemento	Geometria do Elemento	Nº de elementos	Nº de Nós
Cilíndrico	Axisimétrico Quadrilateral de 8 nós		675	2146
Cisalhamento	Tridimensional Hexaédrico de 8 nós		6000	8080

## 6.2 CURVAS DE REAÇÃO NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS

O modelo numérico baseado no critério de escoamento de von Mises incorpora a teoria da plasticidade sem sensibilidade ao efeito do terceiro invariante, como descrito anteriormente, de modo que quando ensaiado numericamente o modelo para os ensaios de tração, o resultado é substancialmente semelhante ao observado experimentalmente, no entanto, o mesmo não é observado quando ensaiado para cisalhamento, onde o terceiro invariante é atenuado, de modo que o resultado não seja fidedignamente semelhante.

Uma das alternativas numéricas encontradas para sanar o problema do terceiro invariante no que diz respeito ao modelo de von Mises quando ensaiado para cisalhamento, foi a parametrização usando como resultados os dados coletados mediante a calibração da curva de encruamento, feita pela equação 5. 1, para os parâmetros obtidos por ensaio de cisalhamento. Portanto, as simulações de cisalhamento e carregamento combinado foram feitas de duas maneiras distintas:

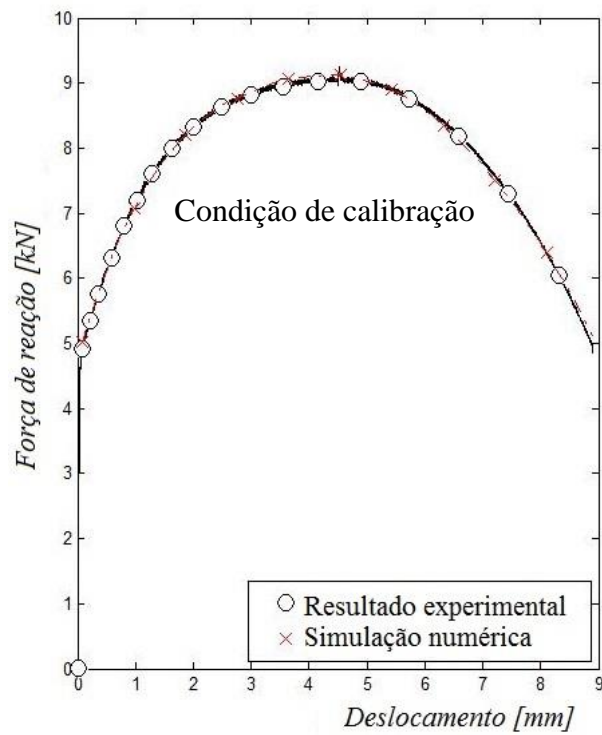
- A primeira consiste em uma simulação mediante a calibração da curva de encruamento do material segundo os parâmetros de tração, obtidos mediante ao ensaio experimental de tração;
- A segunda consiste em uma simulação onde a calibração da curva de encruamento do material é feita com os parâmetros de cisalhamento, obtidos mediante ao ensaio experimental de cisalhamento puro.

Desta forma, na primeira simulação é evidenciado o efeito direto do  $J_3$  não incorporado a teoria baseada no critério de escoamento de von Mises e as consequências disto. No segundo ensaio

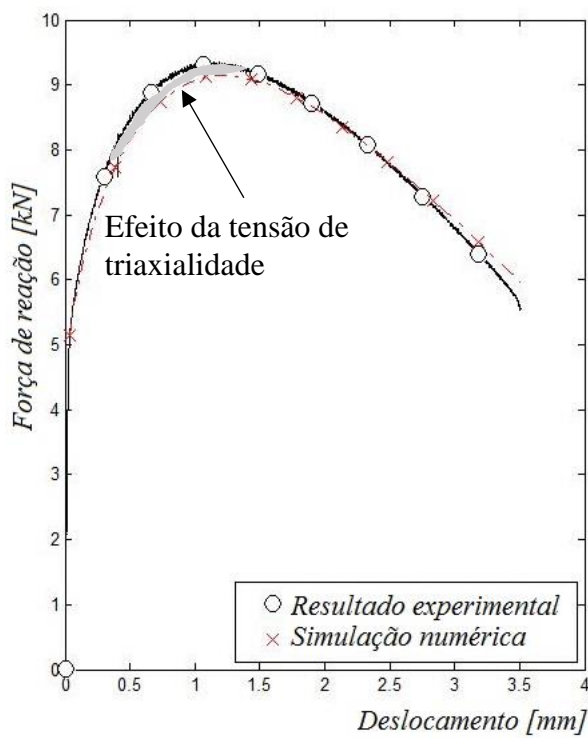


numérico apresenta-se uma solução paliativa que visa corrigir o modelo de Mises insensível ao terceiro invariante, tornando-o suscetível a esse efeito.

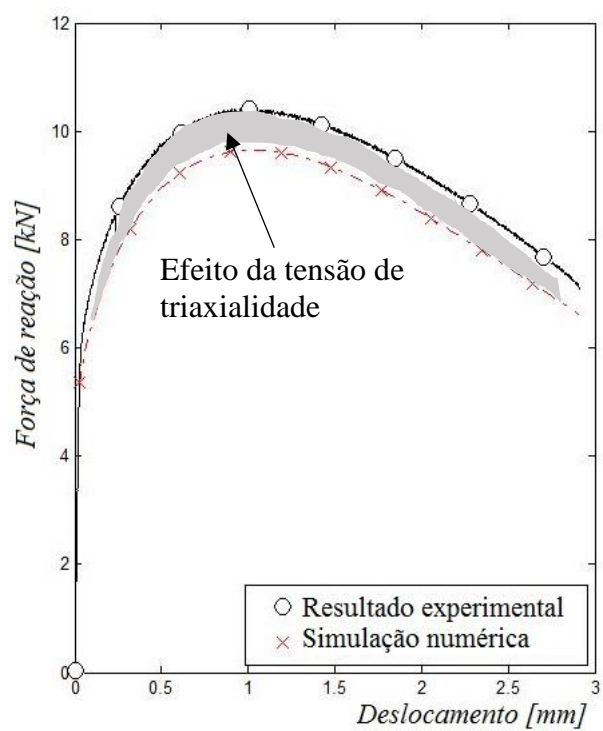
Portanto, para que seja feita uma análise da resposta numérica que apresente o nível de força obtida, dado o nível de deslocamento prescrito, foram realizadas simulações para todos os CPs, considerando como condição de parada, o nível de deslocamento experimentalmente observado (conforme descrito na Tabela 5-1), bem como as propriedades do material determinadas de acordo com o ensaio de tração no corpo de prova cilíndrico liso (primeiro ponto de calibração, ver Tabela 4-1). Os gráficos da Figura 6-3 e Figura 6-4 apresentam comparações entre os resultados numéricos e experimentais para a liga de alumínio 6101.



(a) Cilíndrico liso

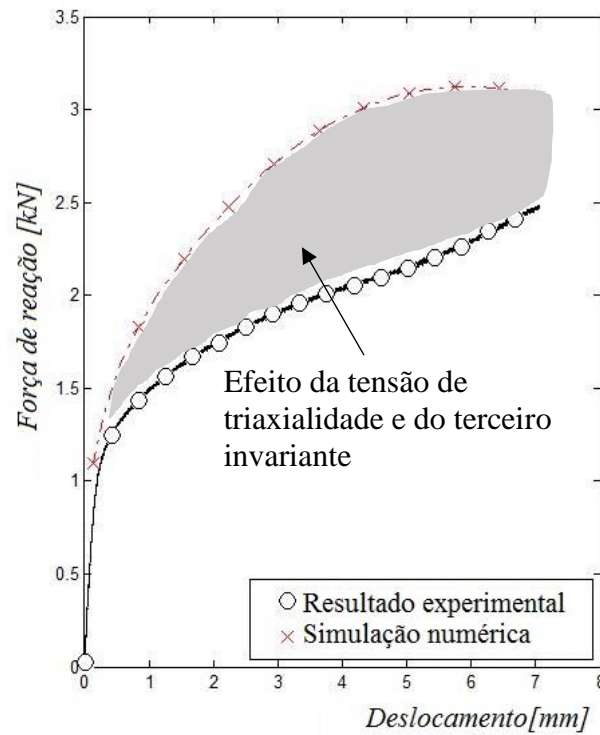


(b) Cilíndrico entalhado R10

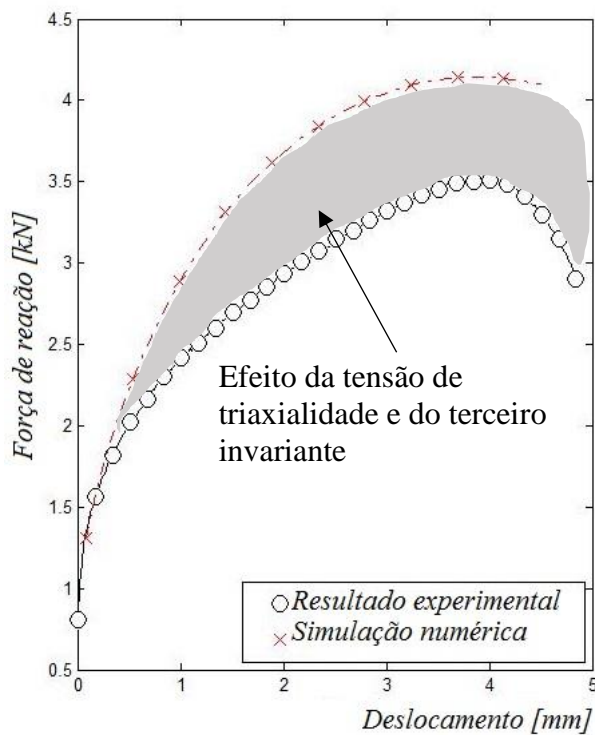


(c) Cilíndrico entalhado R6

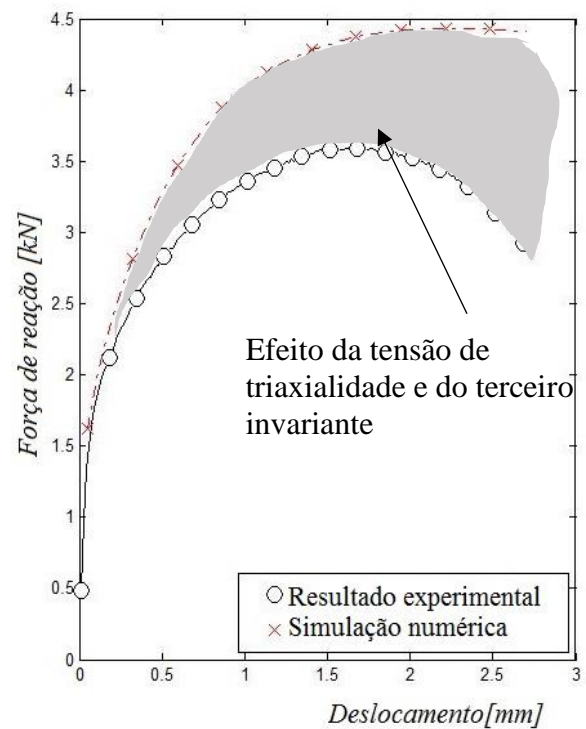
Figura 6-3. Curvas de reação para os CPs cilíndricos.



(a) CP de cisalhamento



(b) Combinado  $\alpha = 30^\circ$



(c) Combinado  $\alpha = 60^\circ$

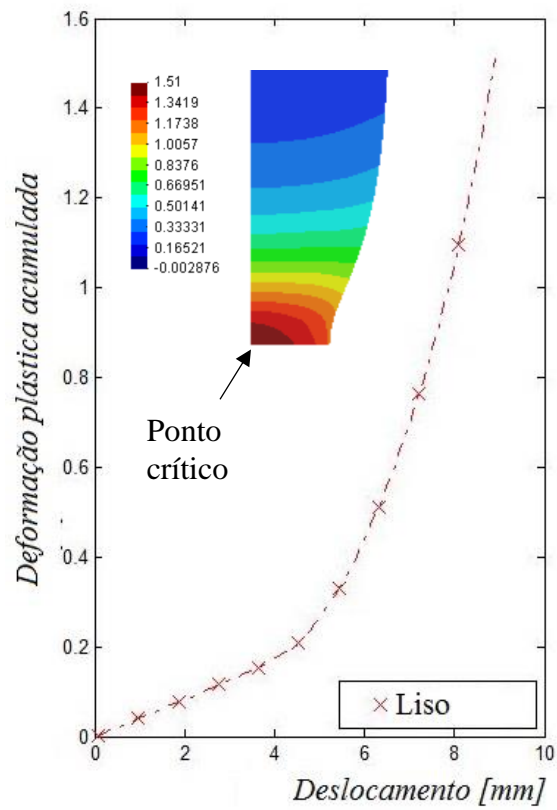
Figura 6-4. Curvas de reação para os CPs retangulares.

Observando a Figura 6-3(a) é possível notar que a curva de reação para o CP cilíndrico liso, obtida numericamente, coincide com a curva de reação obtida experimentalmente. Isto deve-se ao fato de que este ponto foi assumido como o ponto de calibração das propriedades do material. O mesmo não é observado nas curvas de reação obtidas numericamente para os CP's entalhados (ver Figura 6-3(b) e

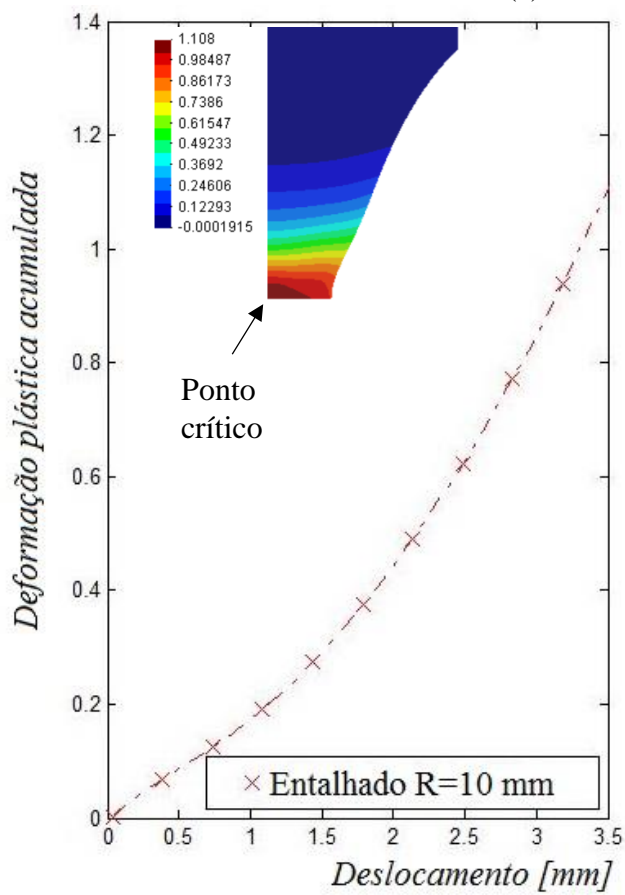
Figura 6-3(c)). Outra observação relevante é o fato de que com o progressivo aumento da severidade do entalhe, os resultados das simulações numéricas diferenciam-se cada vez mais das curvas experimentais, o que é numericamente representado pelo aumento da tensão de triaxialidade. Contudo, para os CP's de cisalhamento e carregamento combinado, onde se tem estados de tensão extremamente diferente do estado de tensão utilizado para calibração das propriedades do material (ou em outras palavras, onde a superfície de escoamento é diferente da superfície de escoamento obtida pela calibração em tração), tal diferença nos estados de tensões pode ser quantitativamente justificada pela diferença tanto nos valores das tensões de triaxialidade quanto nos valores do terceiro invariante normalizado (ver Tabela 4-1). O comportamento obtido pela simulação numérica é consideravelmente diferente do resultado experimental. Este comportamento é justificado pela falta do efeito da tensão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado na formulação do modelo constitutivo utilizado nas simulações numéricas baseado no critério de escoamento de von Mises.

### **6.3 EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA ACUMULADA**

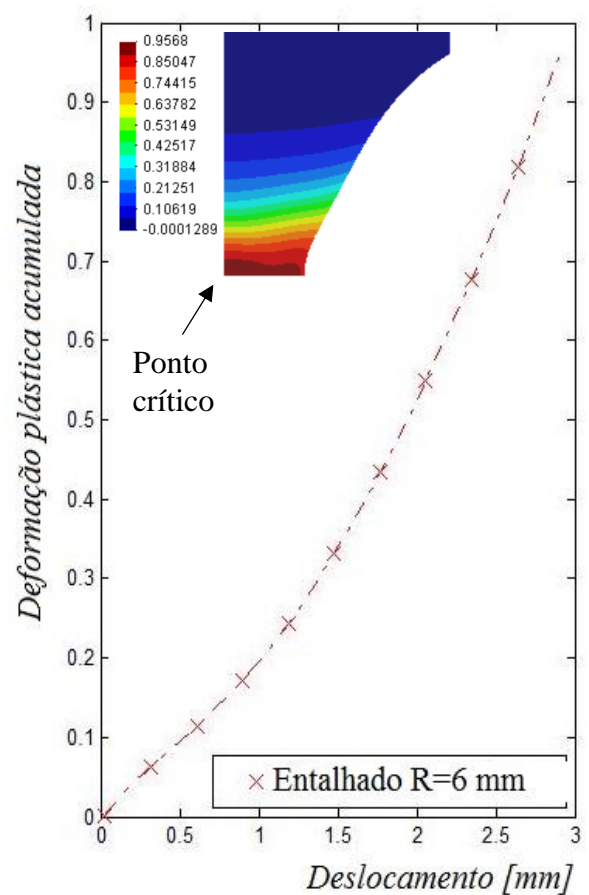
A deformação é uma das informações mais importantes para engenharia. Sabendo-se o quanto o material pode deformar é possível a construção de um projeto mecânico mais eficiente, sem ter que, por exemplo, superdimensionar a sua estrutura. Sendo assim, foram analisadas as curvas de evolução da deformação plástica acumulada em função do deslocamento, para os diferentes CPs, no ponto crítico. O ponto crítico consiste no ponto de início da fratura, observado experimentalmente, o que nestes casos, coincide com o ponto de máxima deformação plástica acumulada. A Figura 6-5 e a Figura 6-6 apresentam a evolução da deformação plástica equivalente em função do nível de deslocamento imposto até a fratura.



(a) Cilíndrico liso

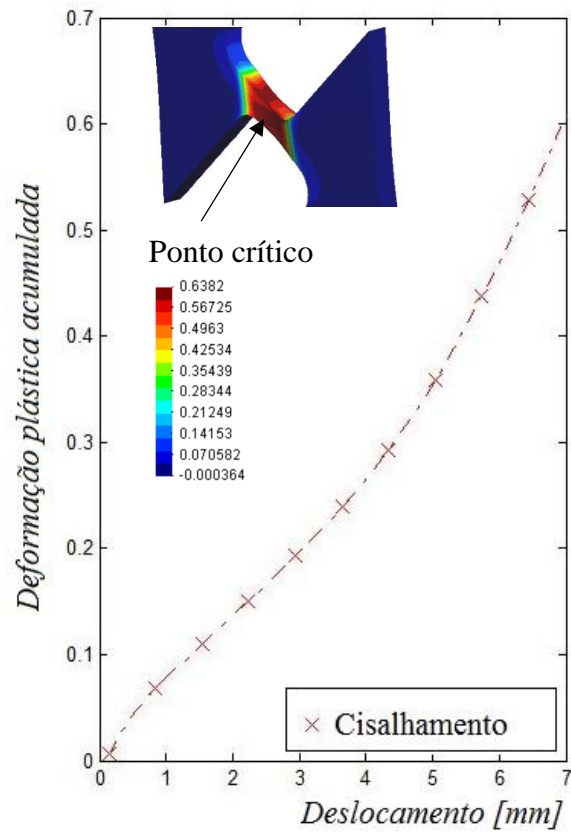


(b) Cilíndrico entalhado R10

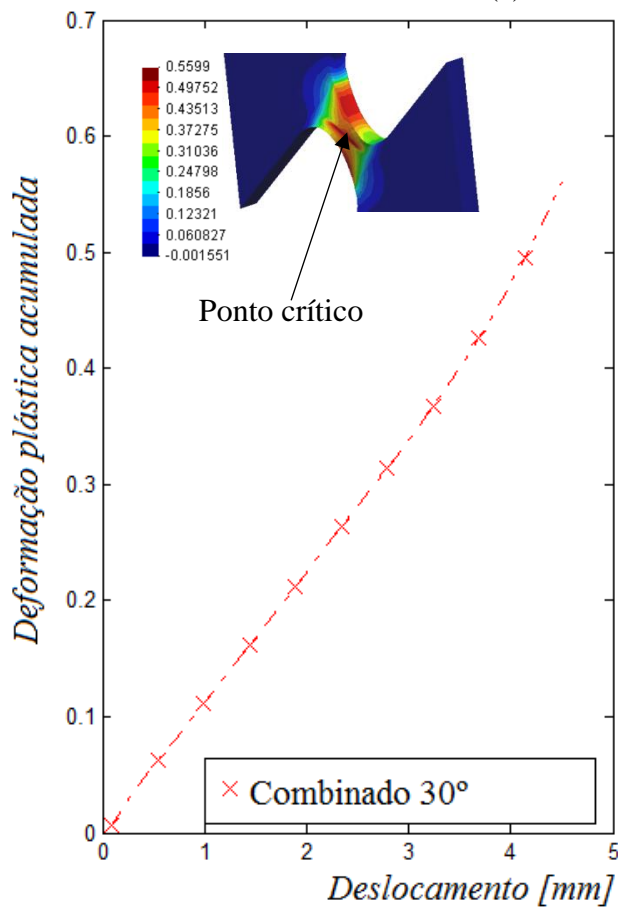


(c) Cilíndrico entalhado R6

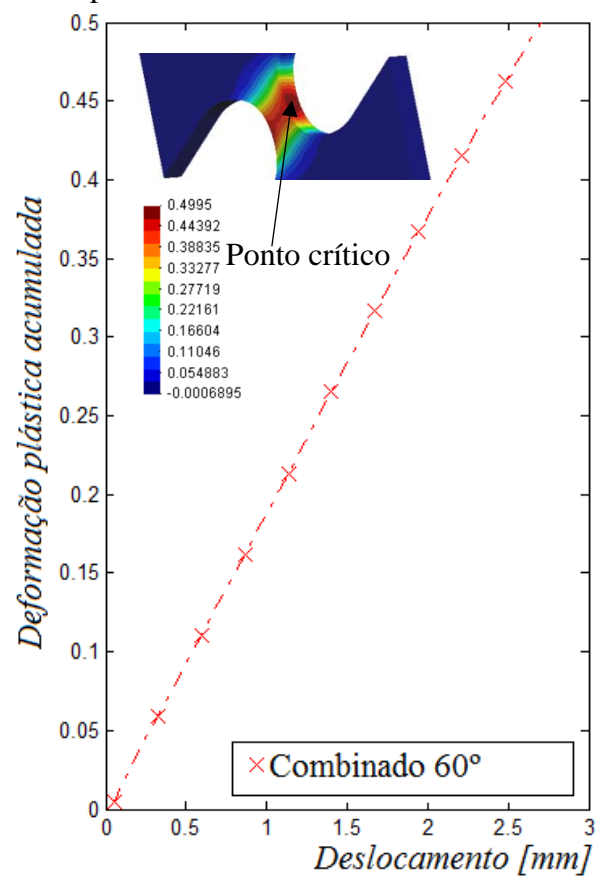
Figura 6-5. Curvas de evolução da deformação plástica acumulada para os CP's cilíndricos



(a) Cisalhamento puro



(b) Carregamento combinado  $\alpha = 30^\circ$



(c) Combinado  $\alpha = 60^\circ$

Figura 6-6. Curvas de evolução da deformação plástica acumulada para os CP's retangulares.

Observando-se os gráficos da Figura 6-5 e Figura 6-6 é possível fazer um comparativo das deformações plásticas acumuladas com os parâmetros elastoplásticos descritos na Tabela 4-1 como segue:

Tabela 6-2. Parâmetros elastoplásticos e deformação plástica acumulada.

<i>Descrição</i>	<i>R [mm] / <math>\alpha</math></i>	<i>Tensão de triaxialidade [<math>\eta</math>]</i>	<i>Terceiro invariante normalizado [<math>\xi</math>]</i>	<i>Deformação plástica acumulada</i>
<b>CP de cisalhamento</b>	0°	0	0	0,64
<b>CP combinado 30°</b>	30°	0,10	0,15	0,56
<b>CP combinado 60°</b>	60°	0,20	0,50	0,50
<b>CP cilíndrico liso</b>	-	0,33	1	1,51
<b>CP cilíndrico entalhado</b>	10	0,50	1	1,11
	6	0,60	1	0,96

A Tabela 6-2 revela uma observação importante: a deformação plástica na fratura diminui com o aumento da tensão de triaxialidade, para os corpos de prova cilíndricos, que representam pontos na chamada região de alta tensão de triaxialidade. Desta forma, o ponto de máxima deformação plástica acumulada representa com clareza o ponto de início da fratura dúctil, experimentalmente observado. Observando-se a Figura 6-5 é importante destacar que para o corpo de prova cilíndrico entalhado, com  $R = 6 \text{ mm}$ , a distribuição da deformação plástica acumulada (ver Figura 6-5 c) se apresentou um pouco mais espalhada ao longo da seção crítica do corpo de prova, contudo com um valor máximo no centro geométrico do CP, e ainda respeitando a conclusão de que com o aumento da tensão de triaxialidade observa-se uma diminuição na deformação plástica acumulada na fratura.

Contudo, para os casos dos corpos de prova de cisalhamento e carregamento combinado, observa-se um nível menor de deformação plástica na fratura, quando comparado aos corpos de prova cilíndricos. Estes pontos representam o comportamento da deformação plástica acumulada na fratura, dentro da região de baixa tensão de triaxialidade. Nesta região, pode-se observar que para a liga de alumínio 6101, a deformação acumulada na fratura, hora decresce com o aumento da tensão de triaxialidade e hora cresce com o aumento da tensão de triaxialidade, até o ponto de 0,33, que representa o início da região de alta tensão de triaxialidade. O comportamento da deformação plástica equivalente versus o nível de tensão de triaxialidade pode ser observado através de uma curva de tendência, como apresentado na Figura 6-7.

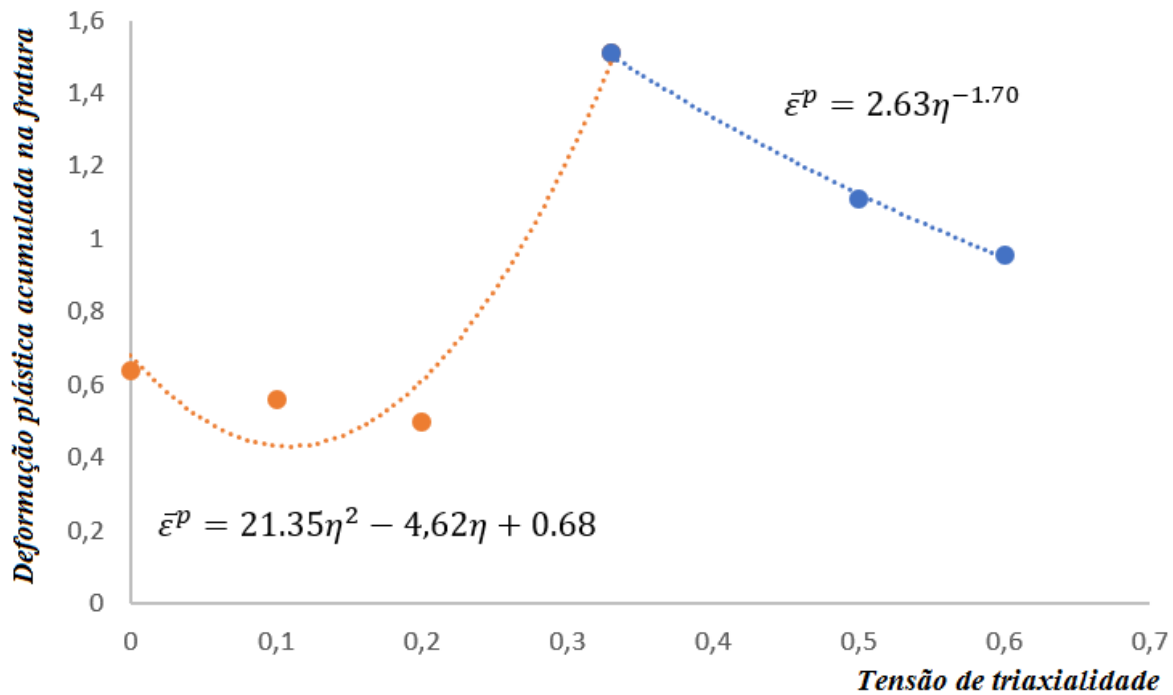


Figura 6-7. Curva de deformação plástica acumulada na fratura versus tensão de triaxialidade inicial

Com os resultados obtidos, pode-se definir equações que representem o nível esperado de deformação plástica acumulada na fratura, de acordo com o nível inicial de tensão de triaxialidade do corpo de prova, como foi demonstrado na curva de tendência da Figura 6-7. As equações (6.1 a) e (6.2 b) representam matematicamente o comportamento esperado na fratura, a primeira com 99% de correlação e aproximada por uma equação exponencial e a segunda com 95% de correlação e aproximada por uma equação polinomial de segunda ordem.

$$\bar{\epsilon}^p = 2,63\eta^{-1,70} \quad (6.1 \text{ a})$$

$$\bar{\epsilon}^p = 21,35\eta^2 - 4,62\eta + 0,68 \quad (6.2 \text{ b})$$

Para fins comparativos, a Tabela 6-3 apresenta os valores das deformações plásticas acumuladas na fratura para todos os CP's calculadas através da simulação numérica do modelo constitutivo baseado no critério de escoamento de von Mises e as equações de aproximação apresentadas.



Tabela 6-3. Valores da deformação plástica acumulada na fratura.

<i>Corpo de prova</i>	<i>Tensão de triaxialidade</i>	<i>Terceiro invariante normalizado</i>	<i>Deformação plástica acumulada</i>	
			<i>Von Mises</i>	<i>Equações (6.1 a)</i>
<b>Cisalhamento</b>	0	0	0,64	0,68
<b>Combinado <math>\alpha = 30^\circ</math></b>	0,10	0,15	0,56	0,43
<b>Combinado <math>\alpha = 60^\circ</math></b>	0,20	0,50	0,50	0,61
<b>Liso</b>	0,33	1	1,51	1,50
<b>Entalhado <math>R = 10\text{ mm}</math></b>	0,50	1	1,11	1,12
<b>Entalhado <math>R = 6\text{ mm}</math></b>	0,60	1	0,96	0,95

#### 6.4 EVOLUÇÃO DA TENSÃO DE TRIAXIALIDADE E TERCEIRO INVARIANTE NORMALIZADO

Mediante as simulações numéricas realizadas, é possível estudar os parâmetros elastoplásticos destacados no presente Projeto de Graduação, a tensão de triaxialidade e o terceiro invariante normalizado. Inicialmente, foi estudada a evolução da tensão de triaxialidade, partindo de seu valor inicial como já mostrado anteriormente, até o valor de deslocamento na fratura. A Figura 6-8 representa a evolução da tensão de triaxialidade. Pode-se observar que nas simulações numéricas, os valores finais de tensão de triaxialidade se afastam dos seus valores inicialmente projetados. Este fenômeno ocorre pelo fato da deformação plástica promover significativa mudança da geometria do corpo de prova, o que leva a alterações significativas nas tensões de triaxialidade. A decorrência deste fenômeno pode causar, no limite, alterações significativas no processo de descrição numérica do comportamento elastoplástico do material, podendo ser representado como uma aceleração ou desaceleração no processo de degradação progressiva do material, provocando falhas prematuras para certos estados de tensão e até previsões otimistas da fratura do CP, para outros estados de tensão.

A Figura 6-9 apresenta o contorno da tensão de triaxialidade em dois instantes, o primeiro, em um deslocamento igual à zero, o que representa o início do ensaio, e o segundo, em um deslocamento na fratura, isto é, o momento imediatamente antes do rompimento do material.

A Figura 6-10, por sua vez, mostra o contorno do terceiro invariante normalizado ao longo da geometria do corpo de prova, para um instante antes da deformação (deslocamento igual a zero) e para um instante próximo da fratura (deslocamento na fratura). Em ambos os contornos (Figura 6-9 e Figura 6-10) é possível se observar uma modificação significativa na distribuição dos parâmetros elastoplásticos ao longo da geometria dos CP's, bem como a evolução no valor numérico dentro do ponto crítico. Nota-se também que a distribuição do terceiro invariante normalizado concentra-se de maneira mais atenuada na região de escoamento (região do entalhe, que experimenta deslocamento ao

longo do ensaio) com o aumento da inclinação do entalhe, no entanto, a tensão de triaxialidade encontra-se mais distribuída no contorno da região de escoamento.

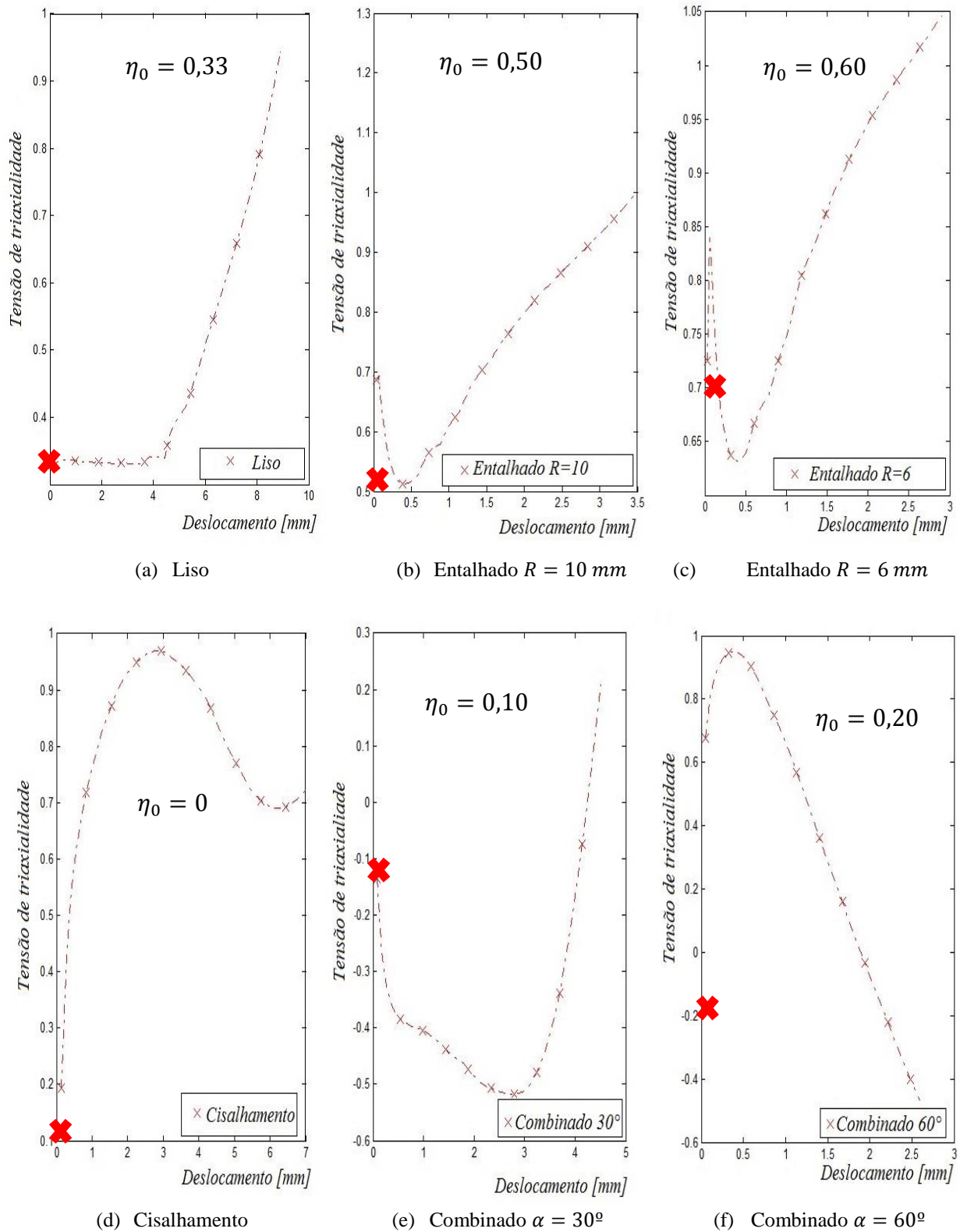


Figura 6-8. Evolução da tensão de triaxialidade no ponto crítico.

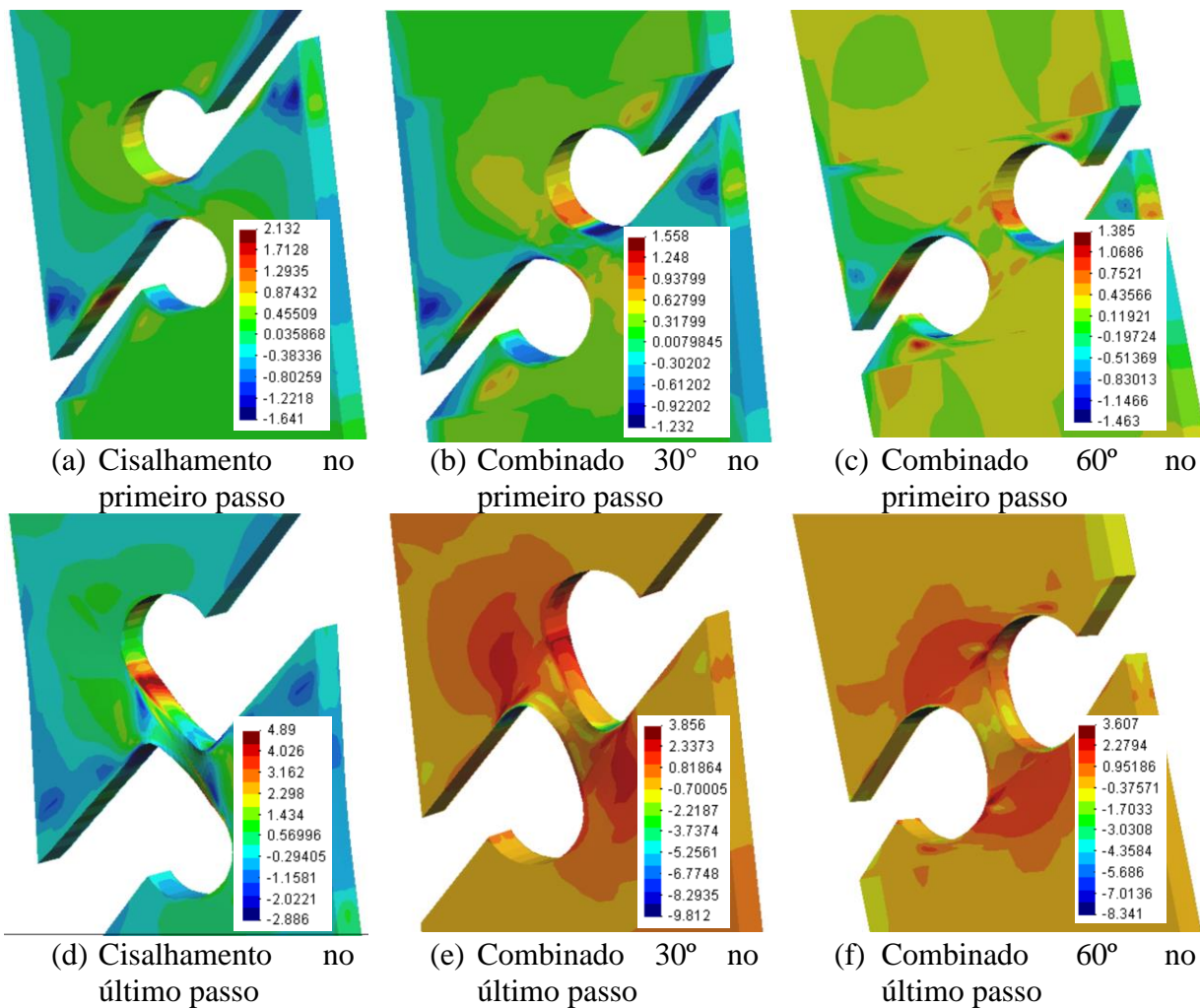


Figura 6-9. Contorno da tensão de triaxialidade no primeiro passo e no último passo para os corpos de prova de cisalhamento e carregamento combinado.

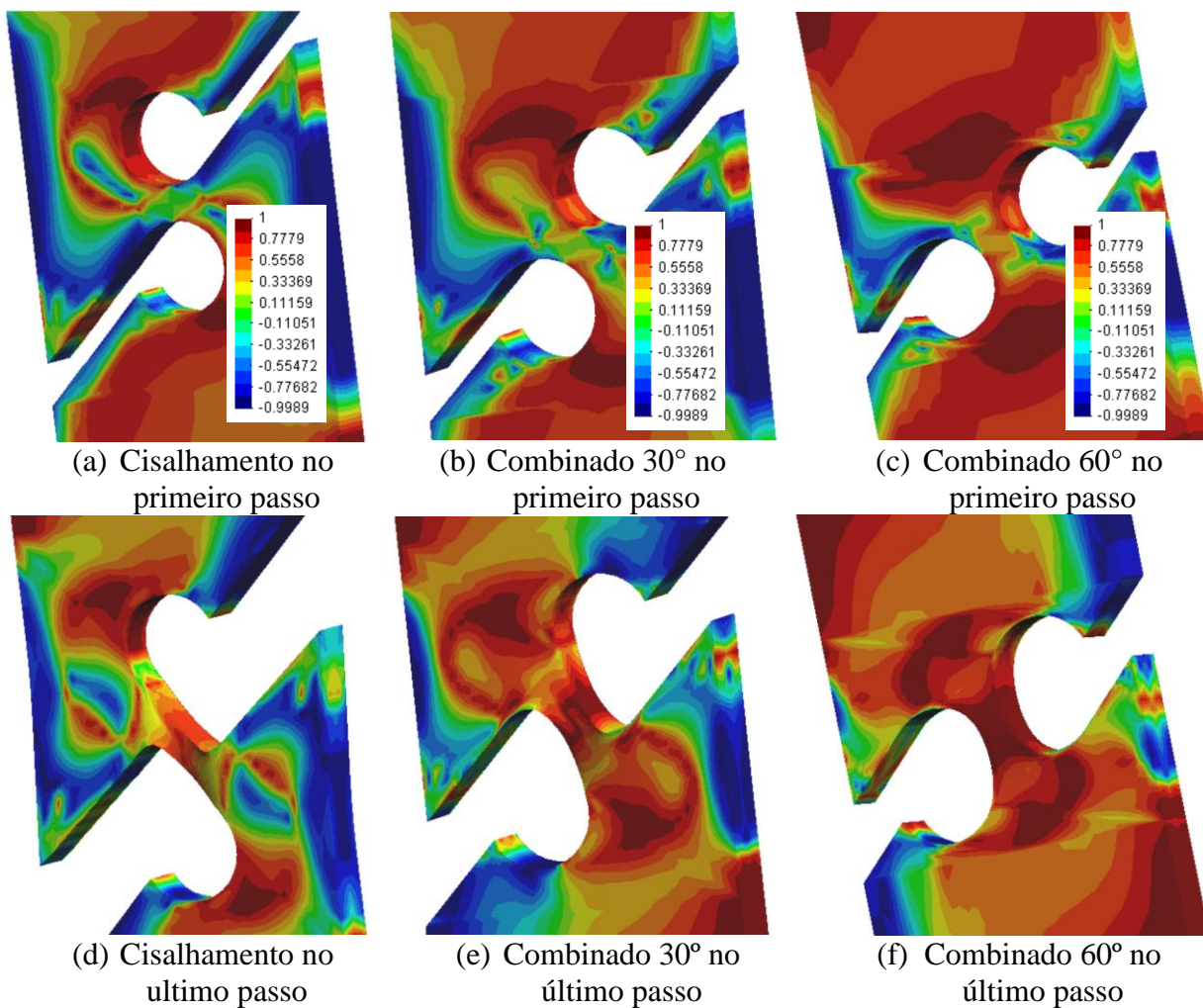


Figura 6-10. Contorno do terceiro invariante normalizado no primeiro passo e no último passo para os corpos de prova de cisalhamento e carregamento combinado.

## 6.5 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO PONTO DE CALIBRAÇÃO NO COMPORTAMENTO DO MATERIAL

O ponto de calibração influencia diretamente na curva de reação do material, podendo aproximá-la ou até mesmo distanciar-la do observado experimentalmente. Nesta etapa do trabalho, busca-se avaliar justamente a influência do ponto de calibração na determinação das curvas de reação, bem como na evolução da deformação plástica acumulada. Para isto, utilizou-se os parâmetros do material calibrados de acordo com o ensaio de cisalhamento realizado, que foi adotado aqui, como o segundo estado de tensão para calibração (ver Tabela 5-2 e Figura 5-9). Para esta análise, assumiu-se somente os resultados para os CP's de cisalhamento e carregamento combinado, pois para estes casos, tanto os valores da tensão de triaxialidade quanto do terceiro invariante normalizado são alterados.

A Figura 6-11 apresenta resultados obtidos para as simulações do CP de cisalhamento, utilizando com entrada, os parâmetros do material identificados de acordo com o primeiro e segundo pontos de calibração. Para o primeiro ponto de calibração foi considerado  $\eta = 0,33$  e  $\xi = 1$ , o que representa os parâmetros elastoplásticos obtidos para o CP cilíndrico liso sob tração, e o segundo ponto de calibração apresenta  $\eta = 0$  e  $\xi = 0$ , correspondentes aos parâmetros obtidos mediante o ensaio do CP de cisalhamento. Pode-se observar que a curva de reação obtida de acordo com o primeiro ponto de calibração, distingue-se da curva de reação experimentalmente observada, visto que o modelo baseado no critério de escoamento de von Mises não contemplar o efeito da tensão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado. Contudo, os resultados numéricos obtidos de acordo com o segundo ponto de calibração, representam com exatidão o comportamento mecânico do material, justificado por ser exatamente o estado de tensão adotado como condição de calibração.

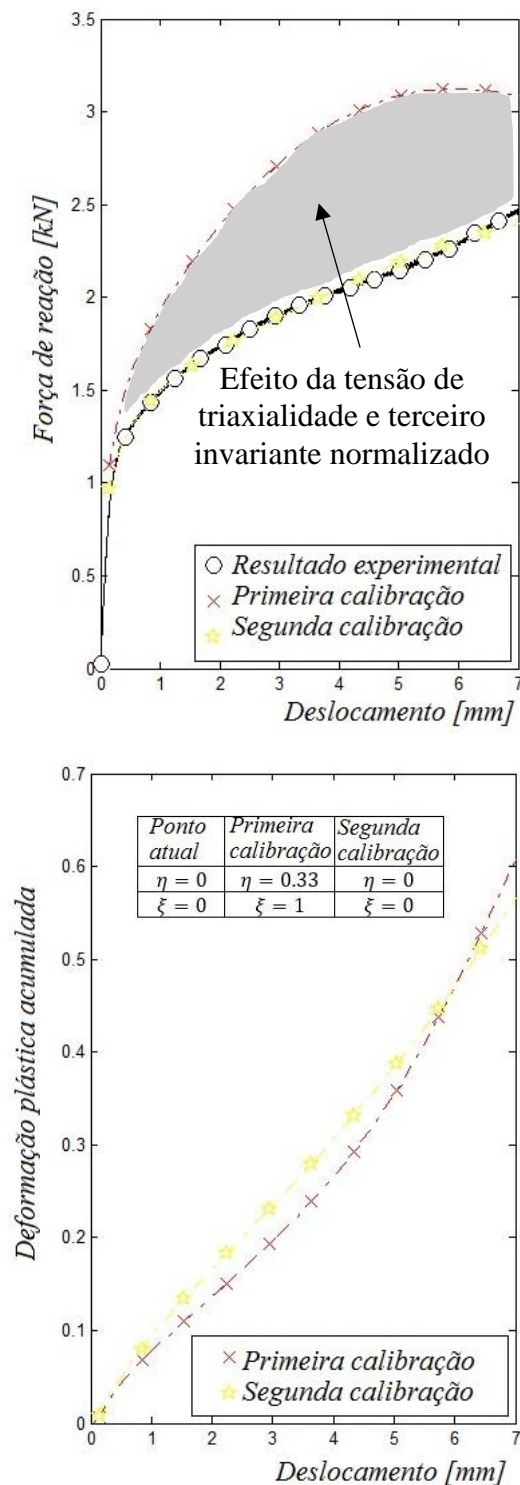
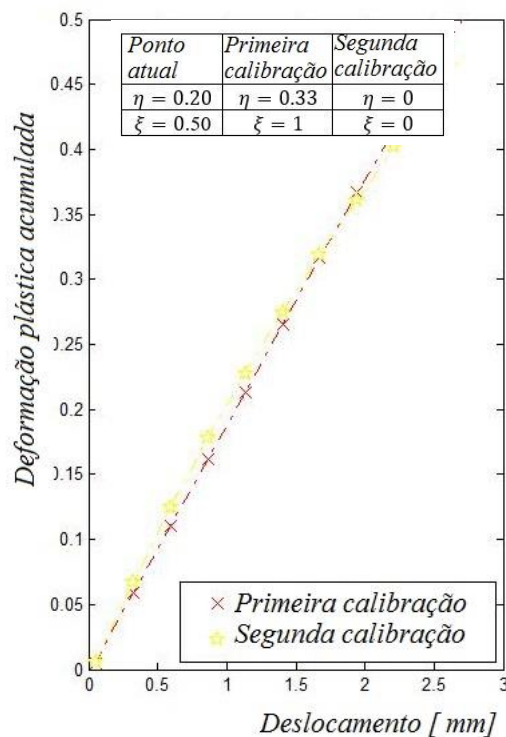
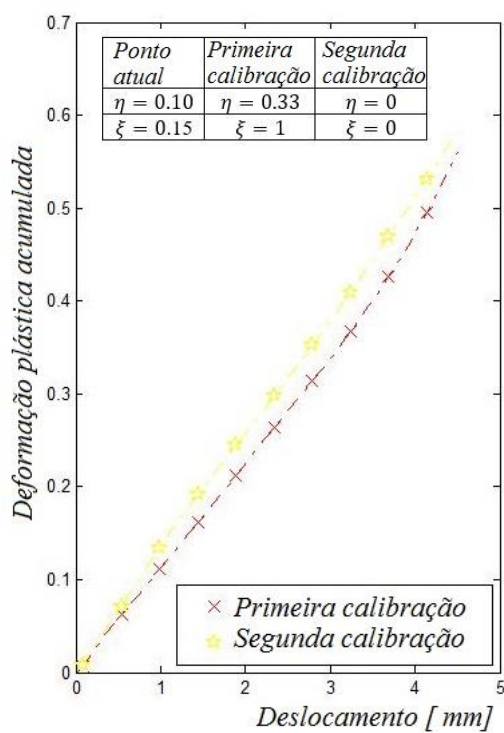
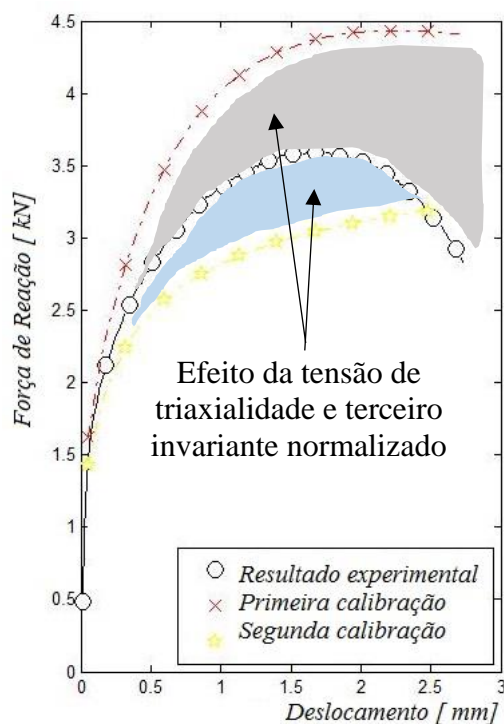
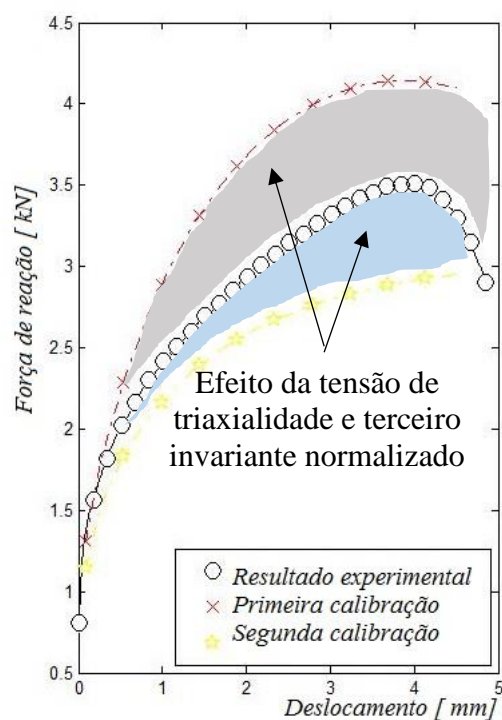


Figura 6-11. Força de reação e deformação plástica acumulada para corpo de prova de cisalhamento em diferentes pontos de calibração.

Os resultados obtidos com as simulações dos corpos de prova sob carregamento combinado, em ambos os casos, apresentam curvas de reação numericamente calculadas, em discordância com os resultados experimentalmente observados. Este comportamento é justificado pelo fato de, em ambos os CP's com carregamento combinado, os parâmetros elastoplásticos se distinguem dos parâmetros elastoplásticos dos dois pontos de calibração

adotados. Ora, o primeiro ensaio para o CP retangular apresenta apenas cisalhamento puro, de modo que o estado de tensão adotado como condição de calibração seja o mesmo do estado de tensão verificado experimentalmente, cisalhamento puro. No entanto, na presença do carregamento combinado existe influência tanto da tração quanto do cisalhamento na resposta ao carregamento imposto ao corpo de prova, de modo que usando-se parâmetros elastoplásticos puramente obtidos por ensaio de tração ou de cisalhamento não contemple ambos os efeitos, e sim, apenas o efeito de cada tipo de carregamento (tração ou cisalhamento). Em outras palavras, a teoria baseada no critério de escoamento de von Mises não incorpora o meio termo referente a um carregamento combinado, incorporando apenas os extremos referentes ao cisalhamento puro ou a tração. Nestes casos, o modelo baseado no critério de escoamento de von Mises, não consegue corrigir o comportamento, visto que não leva em consideração o efeito da tensão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado. A Figura 6-12 apresenta as curvas de reação e deformações plásticas acumuladas para os CP's de carregamento combinado.





Combinado  $\alpha = 30^\circ$

Combinado  $\alpha = 60^\circ$

Figura 6-12. Força de reação e deformação plástica acumulada para CP's de carregamento combinado.



## 7. CONCLUSÕES

*O último capítulo do presente projeto de graduação apresenta as conclusões relevantes sobre o assunto abordado.*

Primeiramente foi avaliada a eficiência do modelo uniaxial que busca descrever o comportamento elastoplástico de materiais dúcteis. Apesar de sua simplicidade matemática na descrição da teoria, o modelo apresenta uma aproximação satisfatória do comportamento do material em um caráter real. O ensaio numérico, sobretudo, foi realizado sobre um comportamento de tração simples, o que torna a teoria mais enxuta, clara e aplicável, desprezando efeitos de média complexidade, como efeitos de Poisson e de alta complexidade, como a triaxialidade, e o terceiro invariante. Sobre o caso unidimensional, vale ressaltar que esse serve perfeitamente como uma introdução a teoria, podendo ser incorporado em casos mais simples como de um carregamento trativo em uma linha de força (qualquer geometria linear onde o comprimento longitudinal seja expressivamente maior do que o comprimento em outra direção), estimulando o estudo mais aprofundado da teoria para modelos que possam descrever materiais de uso comum em aplicações de engenharia.

Mediante aos ensaios experimentais de tração, avaliou-se a eficiência do modelo elastoplástico baseado no critério de escoamento de von Mises, os parâmetros encontrados experimentalmente, o que significa dizer que o modelo incorpora de forma realística os perfis de deformação observados experimentalmente, para um material como o Alumínio 6101. Mediante a simplicidade geométrica, dentro das simulações não foi necessário um numero exorbitante de malhas e elementos, o que evidencia a eficiência da teoria, que sem grandes esforços se assemelha ao padrão real. O resultado para os ensaios de tração era esperado, uma vez que a simulação foi calibrada na mesma superfície de escoamento do ensaio realizado, isto é, como apresentado no trabalho, a superfície de escoamento para a teoria baseada no critério de escoamento de von Mises é representada por um círculo, onde o raio é dado pelo limite de escoamento,  $\sigma_{y0}$ , portanto, para o caso da simulação em elementos finitos quando calibrada com os parâmetros obtidos no ensaio de tração, a superfície de escoamento é a mesma, de modo que a curva de reação represente de forma fiel o resultado experimental.

Outra conclusão importante sobre o ensaio de tração diz respeito à relação entre o aumento progressivo da severidade do entalhe com o aumento da tensão de triaxialidade, sendo verificado nos gráficos de reação pelo distanciamento entre o resultado experimental e numérico. Cabe ressaltar que o único parâmetro elastoplástico que provoca este distanciamento dos resultados da simulação com o ensaio realizado é a tensão de triaxialidade, uma vez que para todos os corpos de prova de tração ensaiados, o terceiro invariante normalizado é o mesmo, sendo igual a um.

Quando ensaiado o material em relação ao cisalhamento puro a teoria baseada no critério de escoamento de von Mises encontra suas primeiras dificuldades de representar o comportamento real, isto deve-se ao fato da influência do terceiro invariante. Uma das alternativas consiste no fato de parametrizar a simulação em elementos finitos pela metodologia apresentada, baseando-se nos parâmetros de calibração obtidos experimentalmente para o ensaio de cisalhamento puro. Novamente, a calibração consiste em alterar a superfície de escoamento do material dentro da simulação numérica. Como observado na Figura 5-10, a superfície de escoamento para os parâmetros calibrados pelo ensaio de cisalhamento puro é menor do que a observada em tração, isto é,  $\sigma_{y0}$  é menor para este caso, de modo que, quando simulado numericamente o ensaio de cisalhamento puro calibrado com os parâmetros de tração, a curva de reação é superestimada, apresentando um resultado acima do esperado, justamente por se estar considerando um limite de escoamento maior do que o observado experimentalmente, este resultado pode ser observado na Figura 6-11, e é um efeito direto da tensão de triaxialidade e do terceiro invariante, isto pois ambos os parâmetros elastoplásticos são diferentes para o caso do ensaio em cisalhamento, quando comparado com o ensaio de tração.

Analizados os estados de tensão de tração e cisalhamento puro, e comparando um ao outro, o próximo passo é analisar o estado de carregamento combinado (tensão e cisalhamento) e compará-lo com o cisalhamento puro. Para os CP's de cisalhamento e carregamento combinado, se tem estados de tensão extremamente diferente do estado de tensão utilizado para calibração das propriedades do material, tal diferença nos estados de tensões pode ser quantitativamente justificada pela diferença tanto nos valores das tensões de triaxialidade quanto nos valores do terceiro invariante normalizado, de modo que o comportamento obtido pela simulação numérica é consideravelmente diferente do resultado experimental, como pode ser observado na Figura 6-4. Este comportamento é justificado pela falta do efeito da tensão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado na formulação do modelo constitutivo utilizado nas simulações numéricas baseado no critério de escoamento de von Mises, levando-se a conclusão de que, para um modelo com os parâmetros de calibração corretos, os efeitos de cisalhamento que são dependentes de fatores como terceiro invariante normalizado e tensão de triaxialidade, podem ser observados. Esta afirmação destaca a importância da superfície de escoamento, um conceito que serve de desenvolvimento inicial da teoria da plasticidade e se torna tão importante no seu desfecho.

A análise da evolução da deformação plástica acumulada apresenta que a deformação plástica na fratura diminui com o aumento da tensão de triaxialidade, para os corpos de prova cilíndricos, que se encontram na chamada região de alta tensão de triaxialidade. Para os casos dos CP's de cisalhamento e carregamento combinado, foi observado um nível menor de deformação plástica na fratura, se comparado aos CP's cilíndricos, estando portanto em uma região de baixa tensão de triaxialidade. Para a liga de alumínio 6101, na região de baixa triaxialidade, a deformação acumulada na fratura, agora decresce com o aumento da tensão de triaxialidade e agora cresce com o aumento da tensão de

triaxialidade, até o ponto de início da região de alta tensão de triaxialidade. Dada esta conclusão, foi possível se traçar o histórico de evolução da deformação plástica em função da tensão de triaxialidade, onde obteve-se equações por meio da curva de tendência que são capazes de apontar com até 99% de correlação a deformação plástica acumulada na fratura, isto significa que é possível determinar o início da fratura com base nos resultados obtidos nos experimentos realizados, o que representa o maior objetivo do projeto de graduação.

O ultimo tópico de análise diz respeito a influência do ponto de calibração nos resultados das simulações numéricas. Como já destacado anteriormente, os pontos de calibração delimitam as superfícies de escoamento para os modelos simulados numericamente em elementos finitos, isto é, usando-se a mesma superfície de escoamento da obtida experimentalmente, os efeitos de tensão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado são incorporados a teoria baseada no critério de escoamento de von Mises, de modo que a representação por meio da curva de reação, as curvas de evolução da deformação plástica acumulada e etc. se aproximem do resultado experimental de maneira satisfatória.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade Pires, F. M. (2005).** Issues on the Finite Element Modelling of Degradation and Prediction of Failure in Finitely Straining Ductile Materials. Swansea, School of Engineering, University of Wales. Ph.D.
- Bai, Y. (2008).** Effect of Loading History on Necking and Fracture. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology
- Bai, Y., Wierzbicki, T. (2007).** A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, 24:1071-1096.
- Bao, Y., Wierzbicki, T. (2007).** On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences* 46 (2004) 81 – 98
- Bardet, J. P. (1990).** Lode Dependence for Isotropic Pressure-Sensitive Elastoplastic materials. *Journal of Applied Mechanics*, 57:498-506.
- Barsoum, I., Feleskog, J. (2010).** Micromechanical analysis on the influence of Lode parameter on void growth and coalescence. *International Journal of Solids and Structures*.
- Bridgman, P., W. (1952).** Studies in Large Plastic Flow and Fracture: With Special Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure. New York-London: McGraw-Hill.
- Brünig, M., (1999).** Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids. *International Journal of Plasticity* 15, 1237-1264. 294.
- Catálogo da MTS, (2013).** Series 647 Hydraulic Wedge Grips Reference Manual.
- De Souza Neto, E.A., Peric, Owen, D.R.J. (2008).** Computational methods for plasticity: theory and applications. *John Wiley & Sons Ltd*.
- Driemeier, L., Brünig, M., Micheli, G., Alves, M., (2010),** Experiments on stress triaxiality dependence of material behavior of aluminum alloys, *Mechanics of Materials*.
- Gao, X., Zhang, G., Roe, C., (2009).** A study on the effect of the stress state on ductile fracture. *Int. J. Damage Mech.*, 19, 75–94.
- Ghajar, R., Mirone, G., and Keshavarz, A. (2013).** Sensitivity Analysis on Triaxiality Factor and Lode Angle in Ductile Fracture. *Jornal of Mechanics*.
- Gurtin, M.E. (1981).** An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press.
- Holzapfel, G.A. (2000).** Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. London: John Wiley & Sons.

- Hencky H (1924).** Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. *ZaMM* 4:323–335
- Hill, R., (1950).** The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford Classic Texts.
- Holzappel, G.A. (2000).** Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. London: John Wiley & Sons.
- Hosford, W.F. (1972).** A generalised isotropic yield criterion. *J. Appl. Mech*, 39:607-609.
- Jirásek, M., Bažant, Z. (2002).** Inelastic Analysis of Structures. Wiley.
- J.LublinerR.L.TaylorF.Auricchio. (1990).** A new model of generalized plasticity and its numerical implementation. Pergamon Press Ltd.
- Kleinermann, J. -P. P. -P(2003).** Parameter Identification and Shape/Process optimization in Metal Forming Simulation. *Journal of Materials Processing Technology*
- Machado, L. Q.; Malcher, L.(2018) .** Inverse Method for Determination of Hardening Parameters of Ductile Materials by a Multi-Image Analysis of Indentation Profiles from Hardness Tests: Numerical and Experimental Aspects. In: The 13th World Congress in Computational Mechanics, 2018, Nova York. WCCM - 2018, 2018. v. 1. p. 1-10.
- Malcher, L. (2011).** Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília. Brasil.
- Malcher, L., Andrade Pires, F.M., César de Sá, J.M.A. (2012).** An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities. *International Journal of Plasticity*.
- Malcher, L. Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A.; Andrade, F.X.C. (2009).** Numerical integration algorithm of a new model for metal plasticity and fracture including pressure and Lode angle dependence. *International Journal of Material Forming - Springer*, 2:443-446.
- Malcher, L., Mamiya, E.N (2014).** An improved damage evolution law based on continuum damage mechanics and its dependence on both stress triaxiality and the third invariant. *International Journal of Plasticity*
- Malcher, L., Reis, F.J.P., Andrade Pires, F.M., César de Sá, J.M.A. (2013).** Evaluation of shear mechanisms and influence of the calibration point on the numerical results of the GTN model. *International Journal of Mechanical Sciences*.
- Prager, W. (1959).** A introduction to plasticity. Addison-Wesley Publishing Comp.

- Richmond, O. and Spitzig, W. A., (1980).** Pressure dependence and dilatancy of plastic flow. In Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the 15th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics., pages 377–386, Toronto, Ont, Can, 1980. North-Holland Publ Co, Amsterdam, Neth.
- Shigley, Joseph E., Mischke, C. R. e Budynas, R. G. (2011).** Projeto de Engenharia Mecânica. Editora Bookman.
- Simo, J.C., & Hughes, T.J.R. (1998).** Computational Inelasticity. New York: Springer-Verlag.
- Stoughton, T., B., Toon, J., W. (2011).** A new approach for failure criterion for sheet metals. International Journal of Plasticity, VOL 27, 440-459

## 9. ANEXOS

	Pág.
Anexo I	Rotina em MatLab para Modelo Unidimensional Isotrópico. 59
Anexo II	Rotina em MatLab para Pós-Processamento da Simulação numérica – Ensaio de Tração. 61
Anexo III	Rotina em MatLab para Pós-Processamento da Simulação numérica – Ensaio de Cisalhamento. 62

---

```

clear all
clc

%Dados

E = 200e3;
Sigmay0 = 100;
H = 10e3;
deftotal = 3*Sigmay0/E;
inc = 100;
deltaepsilon = deftotal/inc;
phitentativa = 0;
tol = 1e-6;

%Vetores Reais
sigma = zeros(1,inc);
defelastica = zeros(1,inc);
defplastica = zeros(1,inc);
defplasticabarra = zeros(1,inc);
vetdeftotal = zeros(1,inc);

%Vetores do Estado Tentativa
defelasticaT = zeros(1,inc);
sigmaT = zeros(1,inc);
defplasticaT = zeros(1,inc);
defplasticabarraT = zeros(1,inc);
for i=1:inc
    vetdeftotal(i+1)=vetdeftotal(i)+deltaepsilon;
end

for n = 1:inc
    defelasticaT(n+1) = defelastica(n) + deltaepsilon;
    sigmaT(n+1) = E*defelasticaT(n+1);
    defplasticaT(n+1) = defplastica(n); defplasticabarraT(n+1) =
defplasticabarra(n);
    phitentativa = abs(sigmaT(n+1)) - Sigmay0 - H*defplasticabarra(n);
    %Passo Elástico

    if phitentativa <= 0
        sigma(n+1) = sigmaT(n+1);
        defelastica(n+1) = defelasticaT(n+1);
        defplastica(n+1) = defplasticaT(n+1);
        defplasticabarra(n+1) = defplasticabarraT(n+1);
    elseif phitentativa > 0
        erro = 1;tol = 1e-6;
        sigmaNR = sigmaT(n+1); deltagamaNR = 0; defplasticaNR =
defplasticabarraT(n+1);
        sigmaNRT = sigmaT(n+1); defplasticaNRT = defplasticabarraT(n+1);
        while (abs(erro)>tol)
            N = sigmaNR/abs(sigmaNR);
            Rsigma = sigmaNR - sigmaNRT + E*deltagamaNR*N;
            Rdef = defplasticaNR - defplasticaNRT - deltagamaNR;
            Rdelgama = abs(sigmaNR) - Sigmay0 - H*defplasticaNR;
            A = [1 0 E*N
                0 1 -1
                N -H 0];

```



```

b = [-Rsigma
      -Rdef
      -Rdelgama];
x = A\b;
sigmaNR = sigmaNR + x(1,1);
defplasticaNR = defplasticaNR + x(2,1);
deltagamaNR = deltagamaNR + x(3,1);

phi = abs(sigmaNR) - Sigmay0 - H*defplasticaNR;
erro=abs(phi)/(Sigmay0+H*defplasticaNR);
end
% Atualização das Variáveis
sigma(n+1) = sigmaNR;
defplasticabarra(n+1) = defplasticaNR;
defelastica(n+1) = defelasticaT(n+1) -
deltagamaNR*(sigma(n+1)/abs(sigma(n+1)));
defplastica(n+1) = defplasticaT(n+1) +
deltagamaNR*(sigma(n+1)/abs(sigma(n+1)));
end
end

plot(vetdefttotal,sigma);
title('Tensão-Deformação');
xlabel('Deformação');
ylabel('Tensão');
legend('\bf\sigma = E\bf\epsilon','fontsize',20)

```

ANEXO II: Rotina em MatLab para Pós-Processamento da Simulação numérica – Ensaio de Tração.

---

```
close all
clear all
clc

% Aluminio 6101 Liso Experimental
fileID = fopen('curva_exp.txt','r');
formatSpec = '%f %f';
sizeA = [2 Inf];
data = fscanf(fileID,formatSpec, sizeA); data = data';
fclose(fileID);
Forcall_M_exp = data(:,2);DeslL_M_exp = data(:,1);

% von Mises aluínio
fileID = fopen('Cisalhamento_6101_v1.gnu','r');
formatSpec = '%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f';
sizeA = [16 Inf];
data = fscanf(fileID,formatSpec, sizeA); data = data';
fclose(fileID);
Forcall_M = data(:,6);DeslL_M = data(:,3);DefL_p_eq_M= data(:,12);
TL_M =data(:,10);

% grafico da deformação plástica equivalente

figure
grid on
plot(DeslL_M,DefL_p_eq_M, '. k'),hold on;
title('Deformação Plástica Equivalente')
xlabel('Deslocamento (mm)','linewidth',2)
ylabel('Deformação Plástica Equivalente','linewidth',2)
legend('CP Alumínio 6101 von Mises','location', 'southeast')

figure
grid on
plot(DeslL_M,Forcall_M, 'x b', DeslL_M_exp, Forcall_M_exp ,'. r'),hold on;
title('Força-Deslocamento')
xlabel('Deslocamento (mm)','linewidth',2)
ylabel('Força (N)','linewidth',2)
legend('CP Alumínio 6101 von Mises','location', 'southeast', 'CP Alumínio 6101 Experimental','location', 'southeast')
```

```
close all
clear all
clc

% Aluminio 6101 Experimental
fileID = fopen('curva_exp.txt','r');
formatSpec = '%f %f';
sizeA = [2 Inf];
data = fscanf(fileID,formatSpec, sizeA); data = data';
fclose(fileID);
Forcall_M_exp = data(:,2);DeslL_M_exp = data(:,1);

% von Mises aluínio com parametros de tração
fileID = fopen('Cisalhamento_6101_v1_parametros_de_tracao.gnu','r');
formatSpec = '%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f';
sizeA = [16 Inf];
data = fscanf(fileID,formatSpec, sizeA); data = data';
fclose(fileID);
Forcall_M_tracao = data(:,6);DeslL_M_tracao = data(:,3);DefL_p_eq_M_tracao = data(:,12);
TL_M =data(:,10);

% von Mises aluínio com parametros de cisalhamento
fileID = fopen('Cisalhamento_6101_v1_parametros_de_cisalhamento.gnu','r');
formatSpec = '%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f';
sizeA = [16 Inf];
data = fscanf(fileID,formatSpec, sizeA); data = data';
fclose(fileID);
Forcall_M = data(:,6);DeslL_M = data(:,3);DefL_p_eq_M = data(:,12);
TL_M =data(:,10);

%Gráfico comparativo dos 3 modelos

figure
grid on
plot(DeslL_M_tracao,Forcall_M_tracao, 'x b',DeslL_M,Forcall_M, '^ r',
DeslL_M_exp, Forcall_M_exp, '. k'),hold on;
title('Força-Deslocamento')
xlabel('Deslocamento (mm)','linewidth',2)
ylabel('Força (N)','linewidth',2)
legend('CP Alumínio 6101 com parametros de calibração por tração','location', 'southeast','CP Alumínio 6101 com parametros de calibração por cisalhamento', 'location', 'southeast', 'CP Alumínio 6101 Experimental','location', 'southeast')
```